Satisfactibilidad y Validez

Semestre 2011-2

Satisfactibilidad

Dándole una razón práctica de ser a la lógica proposicional.

Tan siquiera, en mi opinión (Caleb).

Satisfactibilidad

- Cuando un enunciado es true con tan siquiera un modelo.
  - Se dice que el modelo *m* satisface al enunciado P.
- ¿Cómo encontramos a *m*?

Satisfactibilidad

- Algoritmo 1:
  - Probar todos los posibles modelos y ver si **uno** hace a P true.

Validez

- Cuando un enunciado P es true para todo modelo.
- ¿Cómo?

Validez

- Algoritmo 1 (de nuevo)
  - Probar todos los posibles modelos y ver si **todos** hacen a P true.

¿Mejores ideas?

Problemas de Satisfactibilidad

- Muchos problemas se pueden expresar como una lista de restricciones.
  - Su respuesta es el conjunto de valores de las variables del problema tal que dichas restricciones se satisfacen.

Ejemplo

- Agendar el horario laboral a empleados de un hospital:
  - Algunos no trabajan de noche.
  - Ninguno puede trabajar más de X horas a la semana.
  - Algunas personas no pueden trabajar con otras

Otro Ejemplo

- Encontrar “bugs” a programas:
  - Se entrega una especificación lógica del programa
    - Controlador de tráfico aéreo
  - Se entrega una posible situación
    - “Dos aviones están en la pista al mismo tiempo”
  - ¿Se pueden satisfacer estas dos cosas?
    - Si sí, hay un problema con la especificación del programa.

Forma Normal Conjuntiva

- Usualmente (casi siempre), los problemas de satisfactibilidad se escriben de forma:
  - (CLÁUSULA)∧(CLÁUSULA)∧(CLÁUSULA)
- CLÁUSULA es un requisito, en la forma de:
  - (LITERAL)∨(LITERAL)∨(LITERAL)
- LITERAL es una opción que satisface el requisito, en la forma de una variable o su negación:
  - P, Q, ¬P, etc.

Forma Normal Conjuntiva

- $(P \lor Q) \land (\neg P \lor R)$
- $(R \lor \neg Q \lor \neg P) \land (\neg S \lor P)$
-
- $(Q \land \neg P) \land (P \lor S \land R)$

Forma Normal Conjuntiva

- Todo enunciado en Lógica Proposicional se puede escribir en Forma Normal Conjuntiva.
  - CNF en corto (*Conjunctive Normal Form*)

Forma Normal Conjuntiva

- Para convertir:
  - Eliminar ⇒ y ⇔ utilizando ∧ y ∨.
  - Metemos ¬ dentro de paréntesis con las leyes De Morgan.
  - Distribuir ∨ sobre ∧.

Ejemplo

- $(P \vee Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$
- Eliminamos "flechas": $\neg(P \vee Q) \vee (R \Rightarrow S)$
- $\neg(P \vee Q) \vee (\neg R \vee S)$
- Metemos "negación": $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg R \vee S)$
- Distribución de $\vee$: $(\neg P \vee (\neg R \vee S)) \wedge (\neg Q \vee (\neg R \vee S))$
-
- Final: $(\neg P \vee \neg R \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee S)$

Otro Ejemplo

- $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg R \wedge Q)$

Forma Normal Conjuntiva

- Aunque todo enunciado en Lógica Proposicional se puede convertir a CNF, puede crecer exponencialmente en tamaño.

Más Ejemplos

- $(\neg Q \vee P) \vee (\neg R)$
- $(\neg P \wedge Q) \wedge (R \wedge \neg S)$

Algunos Detalles Más...

- Cláusula vacía es False.
  - No hay opciones a satisfacer.
- Enunciado vacío es True.
  - No hay requisitos.
- Enunciado que contiene una cláusula vacía es falsa.
  - Requisito imposible.

Ahora sí...

- ¿Dado un enunciado CNF, como podemos **probar** que es satisfactible?

Satisfactibilidad

- Algoritmo 1:
  - Probar todos los posibles modelos y ver si **uno** hace a P true.
  - El número posible de modelos crece exponencialmente con el número de variables.

Satisfactibilidad

- Algoritmo 2:
  - Crear un árbol de búsqueda donde en cada nivel consideramos ambos valores (True, False) para cada variable (P).
  - En una rama, asumir que P es True:
    - Borrar las cláusulas que contengan P (son satisfechas).
    - Remover ¬P del resto de las cláusulas (no es una opción).
  - En la otra rama, que es False.
    - Lo inverso: borrar cláusulas con ¬P, y remover P.
  - Proseguir con el resto de las variables.

Ejemplo

$(P \lor Q) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg T) \land (P \lor S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

Ejemplo

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (T \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg T) \wedge (P \vee S) \wedge (T \vee R \vee S) \wedge (\neg S \vee T)$$

P=False

P=True

Ejemplo

$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (T \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg T) \wedge (P \vee S) \wedge (T \vee R \vee S) \wedge (\neg S \vee T)$

P=False

P=True

$(Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (T \vee \neg R) \wedge (S) \wedge (T \vee R \vee S) \wedge (\neg S \vee T)$

Ejemplo

$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (T \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg T) \wedge (P \vee S) \wedge (T \vee R \vee S) \wedge (\neg S \vee T)$

P=False

P=True

$(Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (T \vee \neg R) \wedge (S) \wedge (T \vee R \vee S) \wedge (\neg S \vee T)$

Q=False

Q=True

Ejemplo

$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (T \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg T) \wedge (P \vee S) \wedge (T \vee R \vee S) \wedge (\neg S \vee T)$

P=False

P=True

$(Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (T \vee \neg R) \wedge (S) \wedge (T \vee R \vee S) \wedge (\neg S \vee T)$

Q=False

Q=True

$() \wedge (T \vee \neg R) \wedge (S)$
$\wedge (T \vee R \vee S) \wedge (\neg S \vee T)$

Ejemplo

$(P \lor Q) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg T) \land (P \lor S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

P=False

P=True

$(Q) \land (\neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

Q=False

Q=True

$() \land (T \lor \neg R) \land (S)$
$\land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(R) \land (T \lor \neg R) \land (S)$
$\land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

Ejemplo

$(P \lor Q) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg T) \land (P \lor S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

P=False

P=True

$(Q) \land (\neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

Q=False

Q=True

$() \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

R=False

R=True

Ejemplo

$(P \lor Q) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg T) \land (P \lor S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

P=False

P=True

$(Q) \land (\neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

Q=False

Q=True

$() \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

R=False

R=True

$() \land (S) \land (T \lor S) \land (\neg S \lor T)$

Ejemplo

$(P \lor Q) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg T) \land (P \lor S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

P=False

P=True

$(Q) \land (\neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

Q=False

Q=True

$() \land (T \lor \neg R) \land (S)$
$\land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(R) \land (T \lor \neg R) \land (S)$
$\land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

R=False

R=True

$() \land (S) \land (T \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(T) \land (S) \land (\neg S \lor T)$

Ejemplo

$(P \lor Q) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg T) \land (P \lor S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

P=False

P=True

$(Q) \land (\neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

Q=False

Q=True

$() \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

R=False

R=True

$() \land (S) \land (T \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(T) \land (S) \land (\neg S \lor T)$

Ejemplo

$(P \lor Q) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg T) \land (P \lor S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

P=False

P=True

$(Q) \land (\neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

Q=False

Q=True

$() \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

R=False

R=True

$() \land (S) \land (T \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(T) \land (S) \land (\neg S \lor T)$

S=True

Ejemplo

$(P\lor Q)\land(P\lor\neg Q\lor R)\land(T\lor\neg R)\land(\neg P\lor\neg T)\land(P\lor S)\land(T\lor R\lor S)\land(\neg S\lor T)$

P=False

P=True

$(Q)\land(\neg Q\lor R)\land(T\lor\neg R)\land(S)\land(T\lor R\lor S)\land(\neg S\lor T)$

Q=False

Q=True

$()\land(T\lor\neg R)\land(S)\land(T\lor R\lor S)\land(\neg S\lor T)$

$(R)\land(T\lor\neg R)\land(S)\land(T\lor R\lor S)\land(\neg S\lor T)$

R=False

R=True

$()\land(S)\land(T\lor S)\land(\neg S\lor T)$

$(T)\land(S)\land(\neg S\lor T)$

S=True

$(T)\land(T)$

Ejemplo

$(P\lor Q)\land(P\lor\neg Q\lor R)\land(T\lor\neg R)\land(\neg P\lor\neg T)\land(P\lor S)\land(T\lor R\lor S)\land(\neg S\lor T)$

P=False

P=True

$(Q)\land(\neg Q\lor R)\land(T\lor\neg R)\land(S)\land(T\lor R\lor S)\land(\neg S\lor T)$

Q=False

Q=True

$()\land(T\lor\neg R)\land(S)\land(T\lor R\lor S)\land(\neg S\lor T)$

$(R)\land(T\lor\neg R)\land(S)\land(T\lor R\lor S)\land(\neg S\lor T)$

R=False

R=True

$()\land(S)\land(T\lor S)\land(\neg S\lor T)$

$(T)\land(S)\land(\neg S\lor T)$

S=True

$(T)\land(T)$

T=True

True
(enunciado vacío)

Resultado

$(P \lor Q) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg T) \land (P \lor S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

P=False

P=True

$(Q) \land (\neg Q \lor R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

Q=False

Q=True

$() \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(R) \land (T \lor \neg R) \land (S) \land (T \lor R \lor S) \land (\neg S \lor T)$

R=False

R=True

$() \land (S) \land (T \lor S) \land (\neg S \lor T)$

$(T) \land (S) \land (\neg S \lor T)$

S=True

$(T) \land (T)$

T=True

True
(enunciado vacío)

Otro Ejemplo (Literal Puro)

- $(T \vee \neg X) \wedge (\neg S \vee T) \wedge (S \vee \neg X)$
  - T aparece sólo sin negar.
  - X aparece sólo negado.
  - Ambos son “puros”.
- Si T=True: $(S \vee \neg X)$
- Si X=False: $(\neg S \vee T)$
- Ambos simplifican significativamente al enunciado.

DPLL

- Algoritmo creado por:
  - Davis, Putnam, Logeman y Loveland
- Trabaja recursivamente, con un enunciado CNF (E) como entrada.

DPLL a Detalle

- Si E está vacío, regresa True.
- Si hay una cláusula vacía en E, regresa False.
- Si hay una cláusula con un sólo literal U en E, regresa DPLL(E(U=True)). *Cláusula Unitaria*
- Si hay un literal puro (ocurre sólo sin negar o negado) Q en E, regresa DPLL(E(Q=True))
- De otra manera: escoge un literal V al azar y:
  - Si DPLL(E(V=True)) es True, regresa True.
  - Si no, regresa DPLL(E(V=False)).

Discusión

- ¿Es DPLL más eficiente que listar todos los posibles modelos de E y revisar si satisfacen a E?

Discusión

- ¿Cómo se escogería más “inteligentemente” a V, en vez de ser al azar?

Heurística MOMS

- **M**aximum number of **O**ccurrences, **M**inimum **S**ized clauses
- Escoge la variable más instanciada:
  - En $(T \vee X) \wedge (\neg S \vee T) \wedge (S \vee X \vee T)$, sería T
- ¿Por qué?

Heurística MOMS

- Escoge variables altamente restringida.
- Así, si se va a fallar, que se falle pronto.

¿Es Lo Mejor que Podemos Hacer?

¿Qué tan correcto es un resolvedor SAT?

- Sensatez: si es que regresa una respuesta, ésta siempre es correcta.
- Completo: siempre regresa una respuesta.

DPLL

- ¿Es sensato?
- ¿Es completo?
-
- ¿Es rápido?

Rapidez

- En práctica, se ha observado que si el algoritmo **completo**, usualmente también es **lento**.
- Relativamente hablando...

GSAT

- Algoritmo de “mejora iterativa”.
- Basado en el algoritmo de búsqueda: Hill-Climbing.
- Iterar *n* veces:
  - Escoger un modelo al azar: M.
  - Iterar *m* veces:
    - Cambiar de valor a la variable que **cuesta** menos cambiarle su valor.
    - Si el **costo** resultante es cero, regresar M.
- Costo: número de cláusulas insatisfechas en el enunciado.

GSAT

- ¿Es sensato?
- ¿Es completo?
-
- ¿Es lento?

GSAT vs DPLL

- DPLL es sensato y completo.
- GSAT es sensato, pero no completo.
  - No puedes utilizarlo efectivamente para generar todas los posibles modelos satisfactadores.
- En competencias de SAT, GSAT le estaba ganando a DPLL, hasta que los desarrolladores encontraron mejores heurísticas.

GSAT vs DPLL

- Cook y Mitchell discuten que:
  - Problemas con pocas cláusulas (restricciones), conocidos como "Débilmente Restringidos" (*Weakly Constrained*) son fáciles para ambos.
    - Muchas soluciones
  - "Altamente Restringidos" (*Highly Constrained*) son fáciles para DPLL, pero no para GSAT.
    - Pocas soluciones, el proceso de simplificación en DPLL omite conjuntos grandes de modelos no satisfactadores.
    - Para GSAT, es como una aguja en un pajar.
  - Cualquier cosa en medio, es difícil para ambos.

¿Qué pensamos de GSAT ahora?

WalkSAT

- Como GSAT, pero con “ruido” adicional.
- Iterar *n* veces:
  - Escoger un modelo al azar: M.
  - Iterar *m* veces:
    - Escoge al azar una cláusula no satisfecha U.
    - Con probabilidad p=0.5:
      - O cambiar la variable con menos **costo** en C.
      - O cambiar una variable al azar en C.
    - Regresar M si el costo es cero.
- Costo: el mismo que en GSAT.

WalkSAT

- La razón tras cambiar el valor a variables al azar es:
  - De vez en cuando, es necesario “empeorar” las cosas para encontrar situaciones que, potencialmente, nos lleven a “mejorar”.
- Empíricamente, se ha encontrado que hace mejor trabajo que GSAT, pero se le ha atribuido “poca ciencia” a esta técnica.

¿Cuál les gusta más?

Siguiente Clase

- La van a dar ustedes.
- Se formarán dos equipos:
  - Uno estudiará el resolvedor GRASP.
  - El otro estudiará el resolvedor CHAFF.
- Darán una presentación de 20 a 30 minutos:
  - Explicar el resolvedor que les tocó.
  - Explicar otro resolvedor encontrado en la web (de artículo: PDF al maestro y copias a la clase).
  - Compararlos (puntos extras si muestran resultados empíricos) y argumentar cuál es el que se prefiere.