Transformada de Fourier: Aspectos Teóricos

Transformada de Fourier

- En 1807, Fourier propuso una solución a una ecuación conocida como “La Ecuación de Calor”.
- Esta ecuación trataba de describir la manera en la que el calor se distribuía en una placa de metal, dada la existencia de fuentes de calor conocidas.
- Era una ecuación diferencial parcial parabólica, que en ese entonces no tenía solución.

Transformada de Fourier

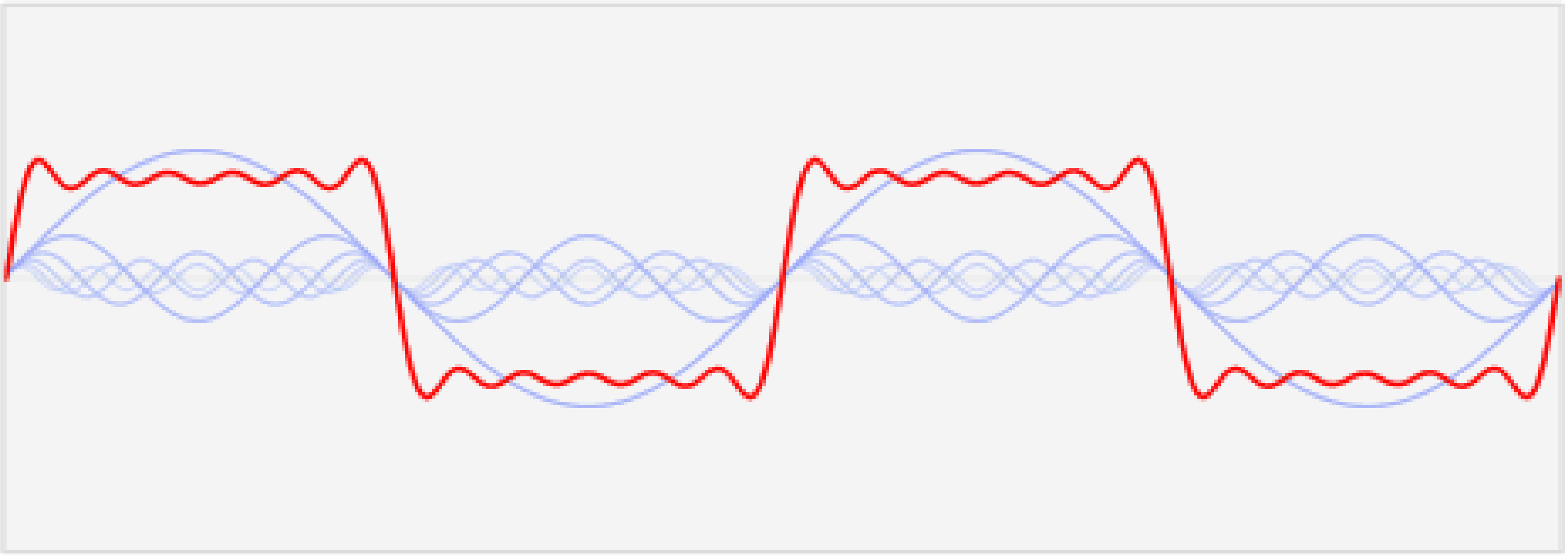
- Antes de Fourier, soluciones particulares para esta ecuación habían sido propuestas.
- Sólo aplicaban si la fuente de calor se comportaba como una *onda*.
  - Dícese, si se comportaba como una señal que oscila a una única frecuencia, como una función de seno o coseno.

Transformada de Fourier

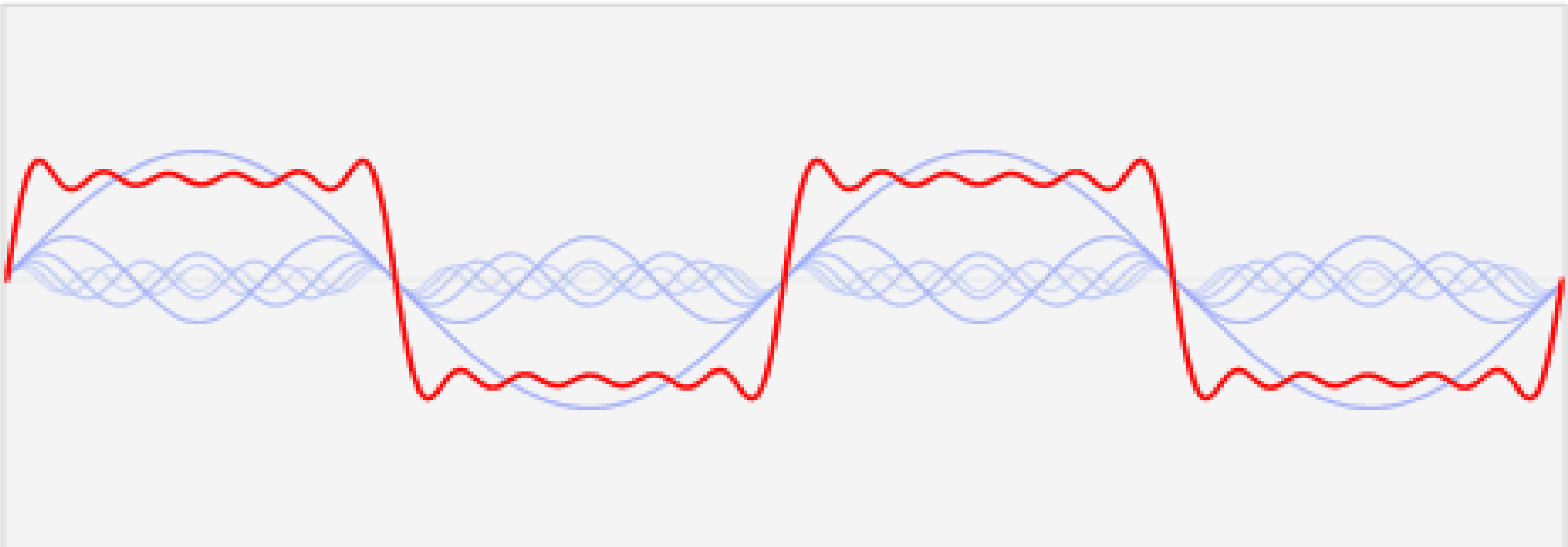
- Fourier generalizó dichas soluciones de la siguiente manera:
- **Varias ondas sumadas entre si pueden ser utilizadas para representar cualquier señal *periódica***.
- Y así, se inventaron las Series de Fourier.

f

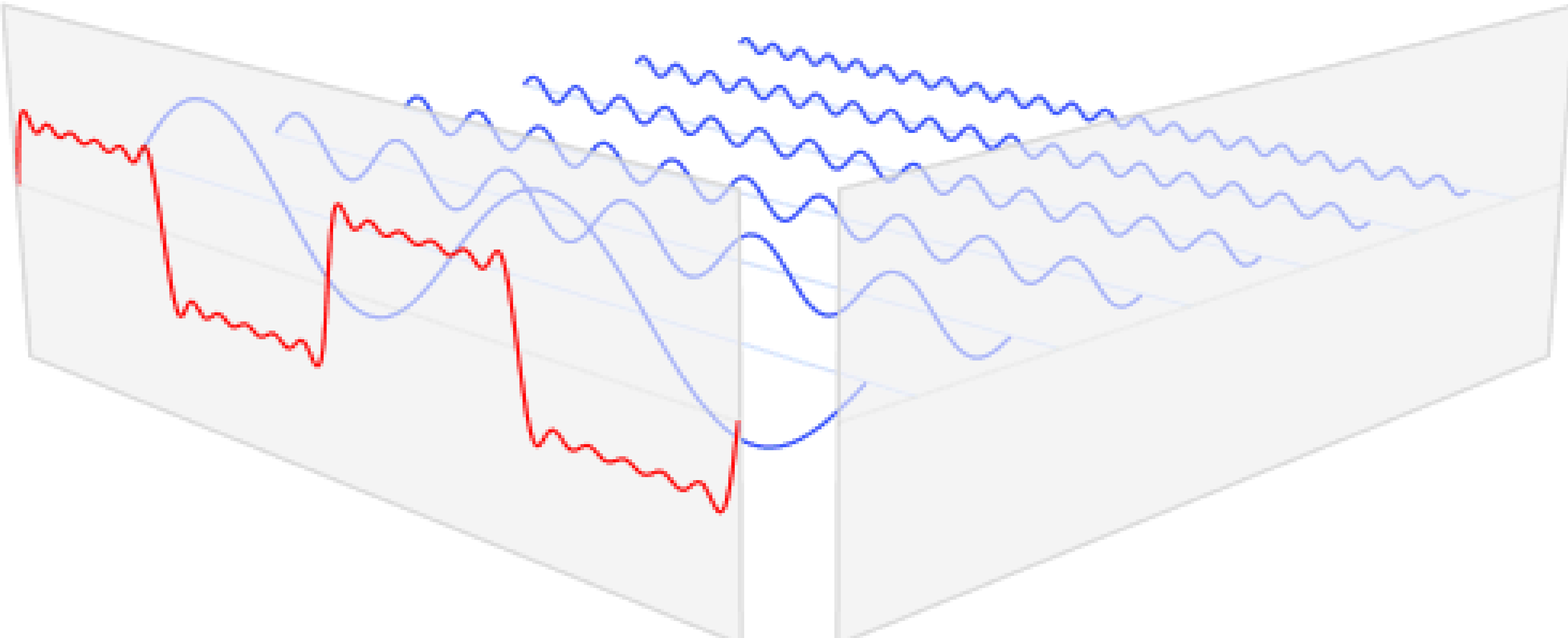
f

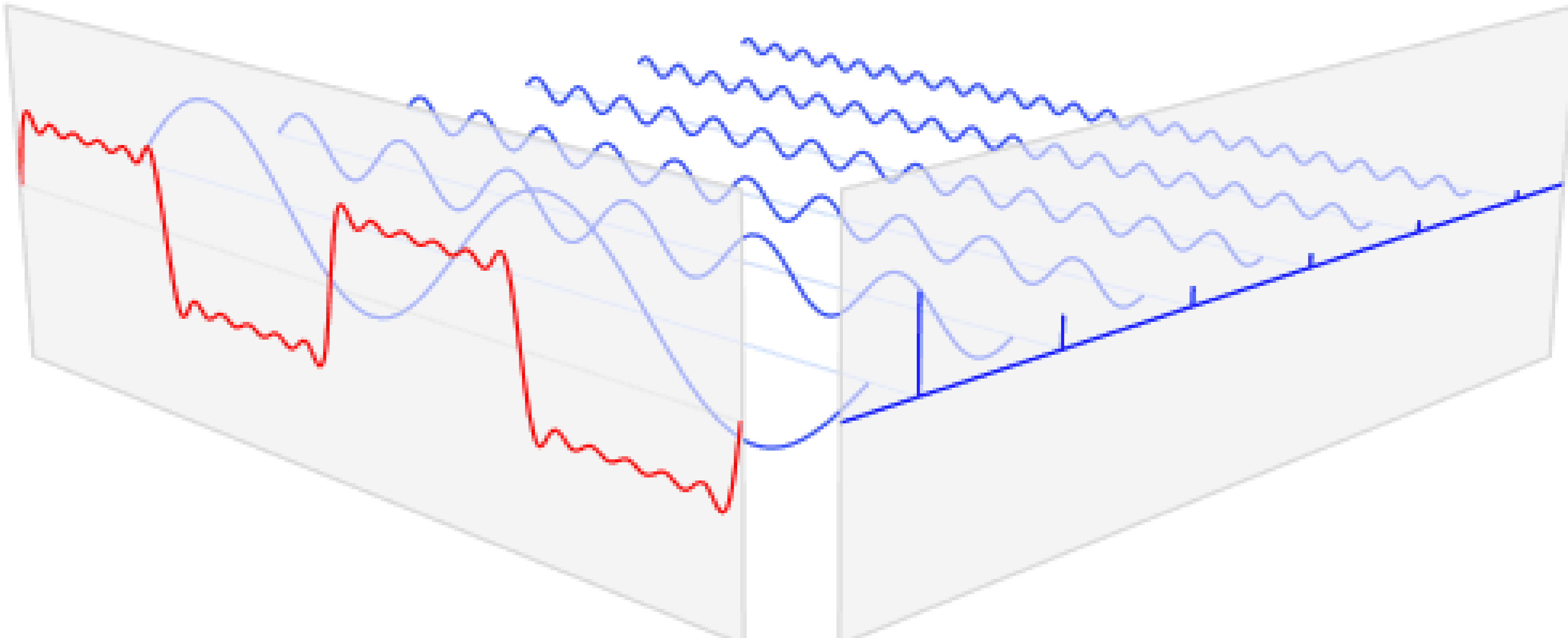


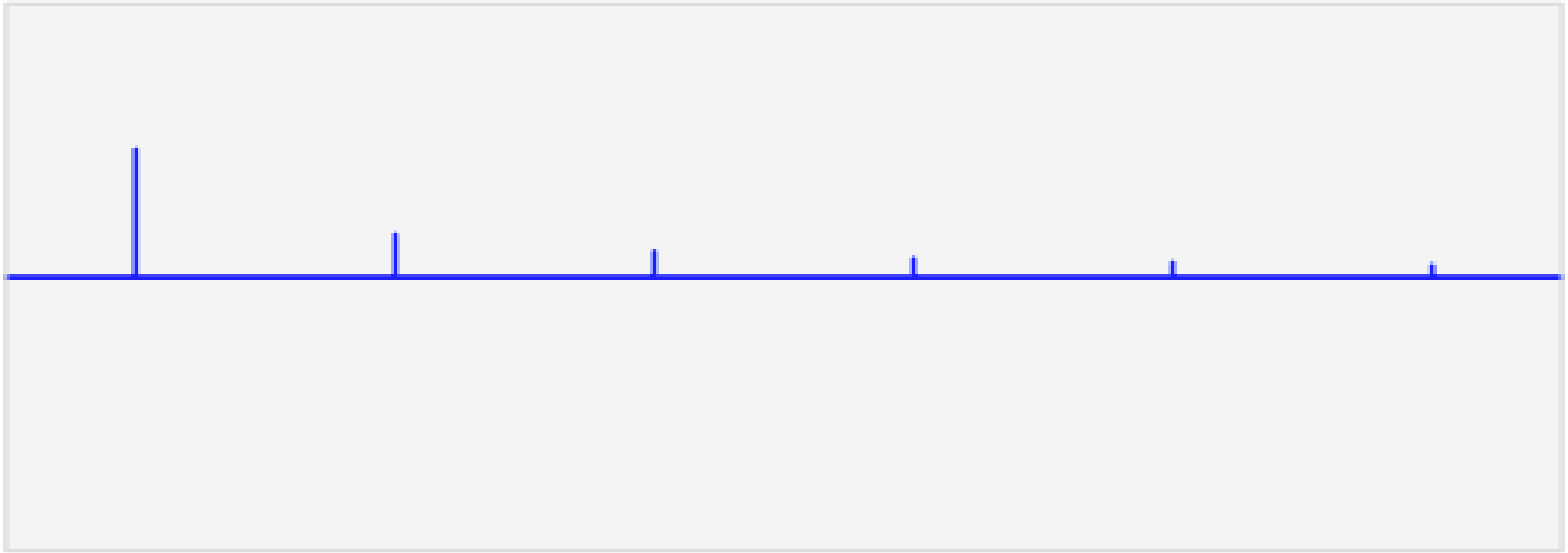
$$f$$

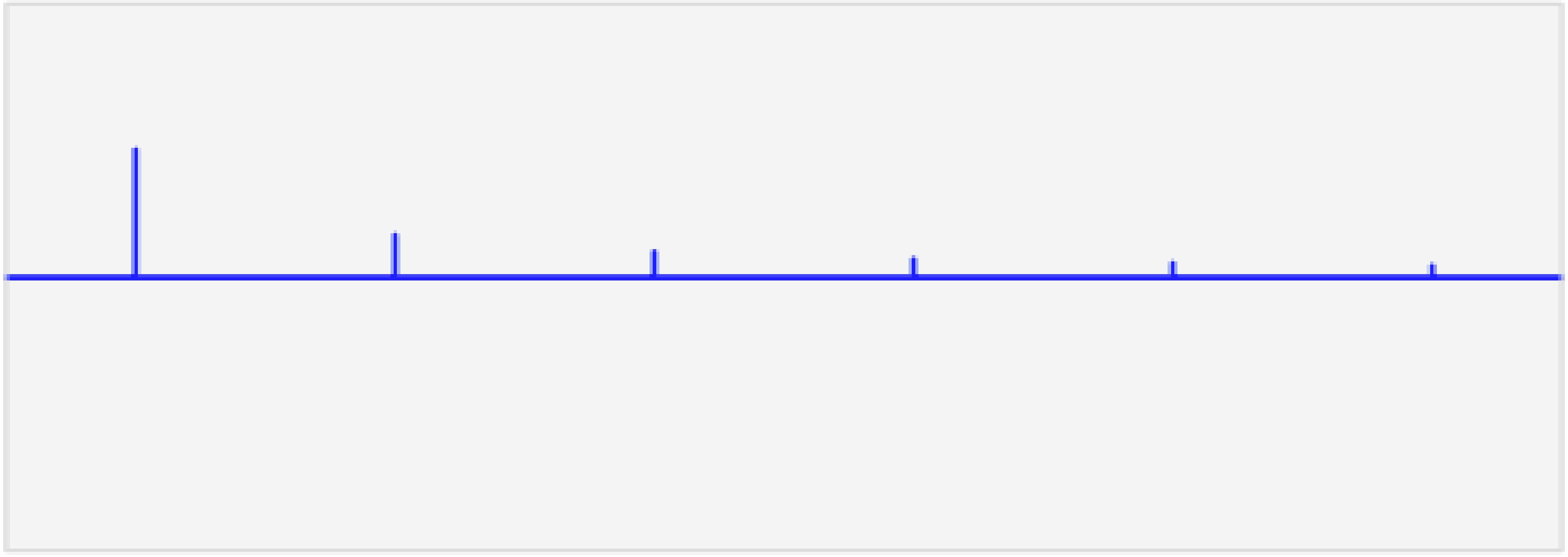


$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$



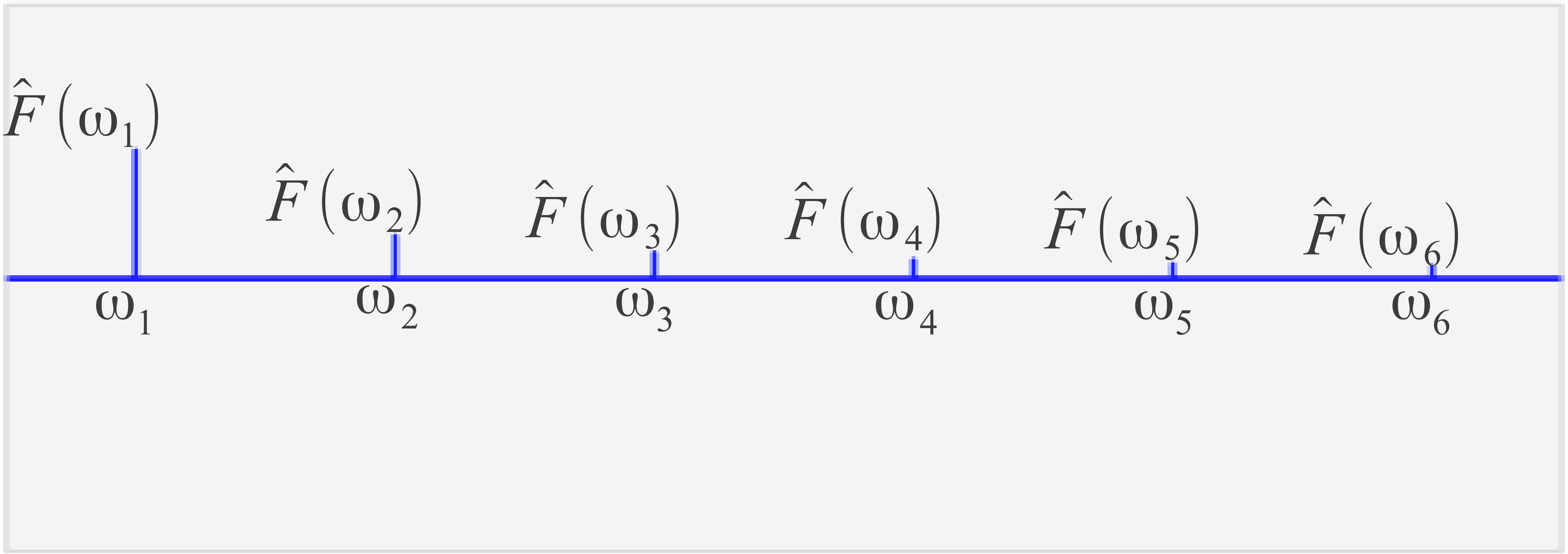






$\hat{f}$

- F es la señal f transformada al dominio de la frecuencia.
- ω_n son las frecuencias de las ondas que, al sumarse, representan a f.
- $F(\omega_n)$ es la magnitud de la onda que oscila con frecuencia ω_n.

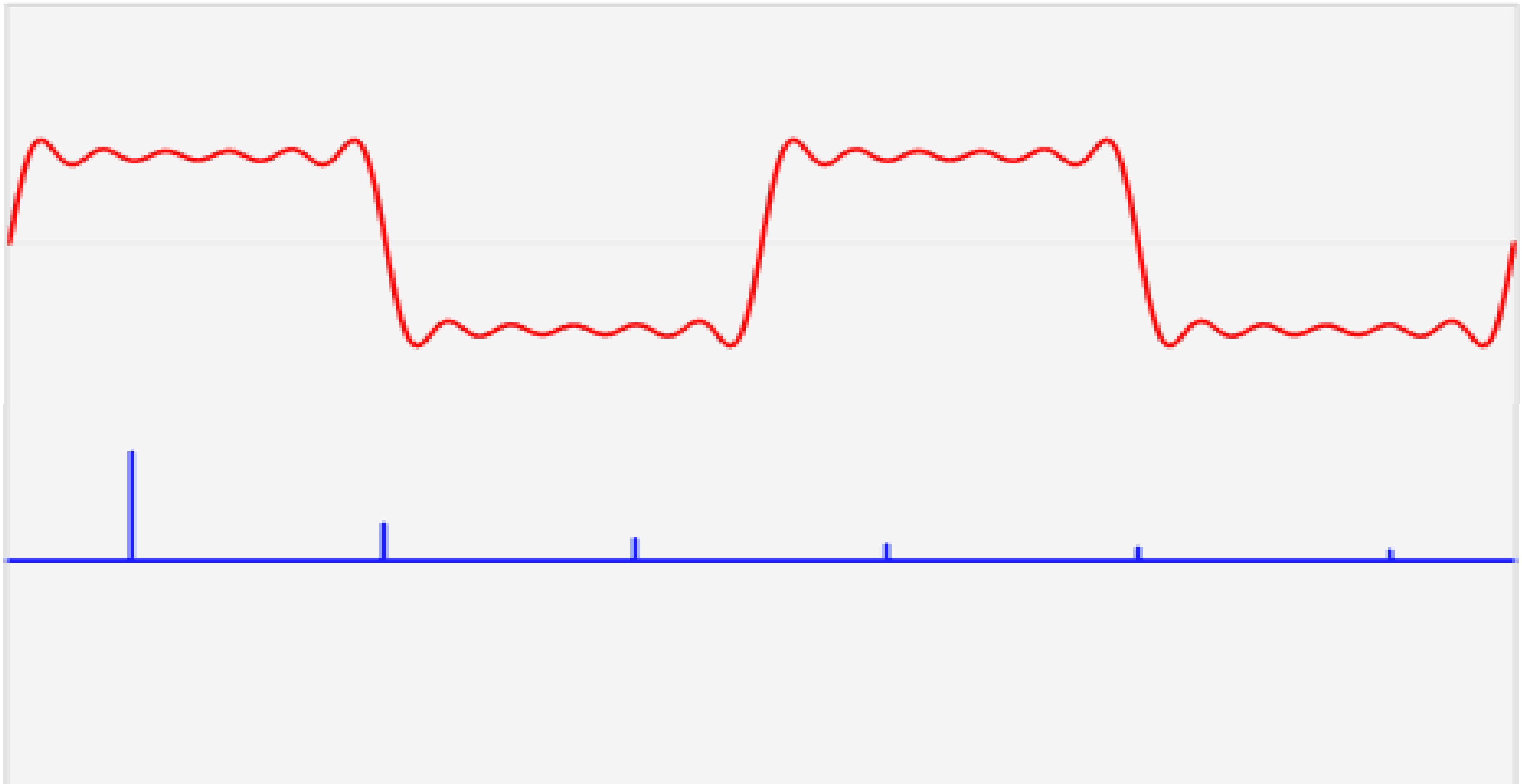


$$\hat{f}$$

¿Para qué?

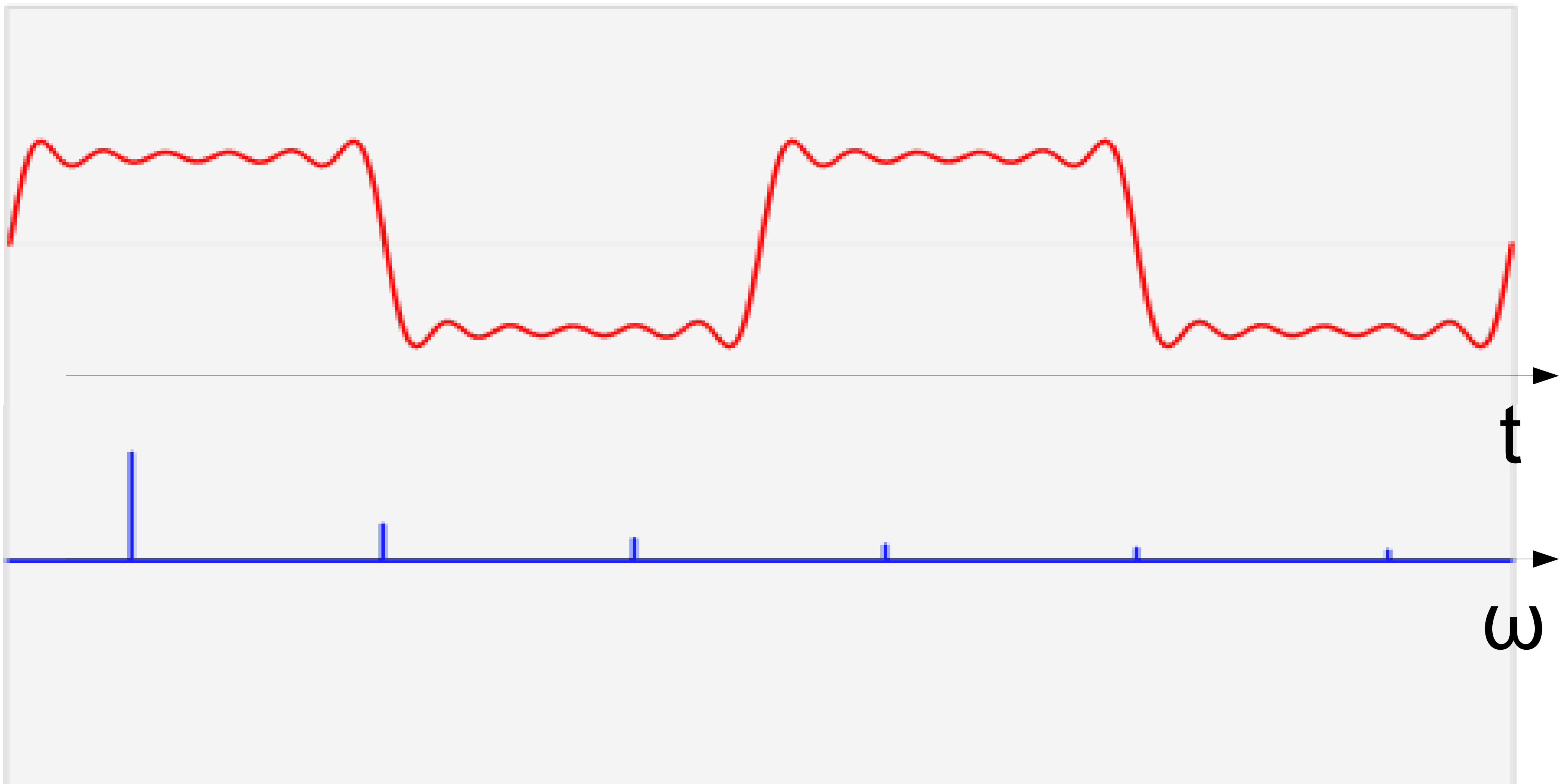
- Permite representar una señal, cualquier señal, en otro *dominio*.
- Es la misma señal, sólo que es vista de dos puntos de vista (o “dominio”) diferente.

f



$\hat{f}$

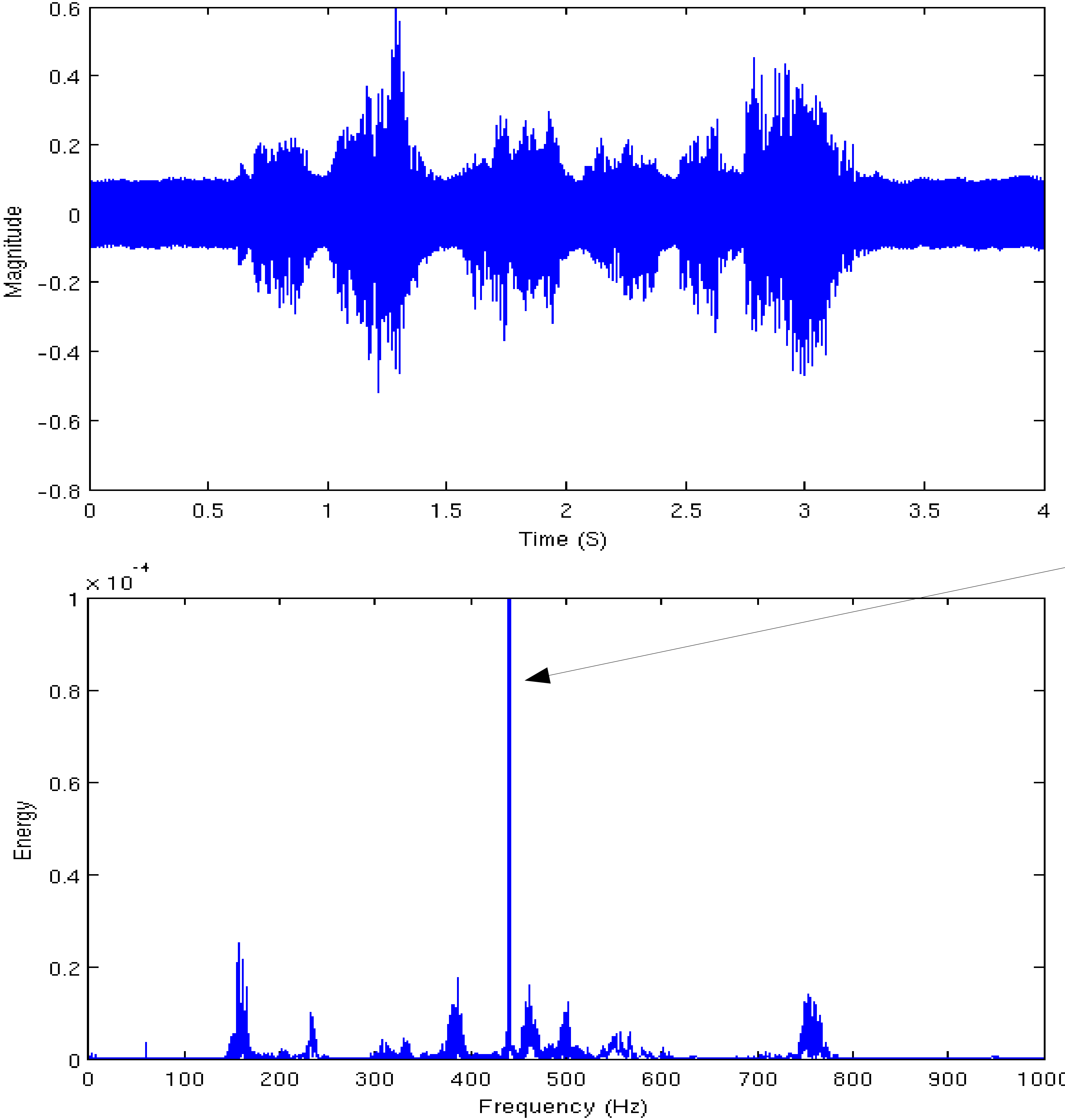
f



$\hat{f}$

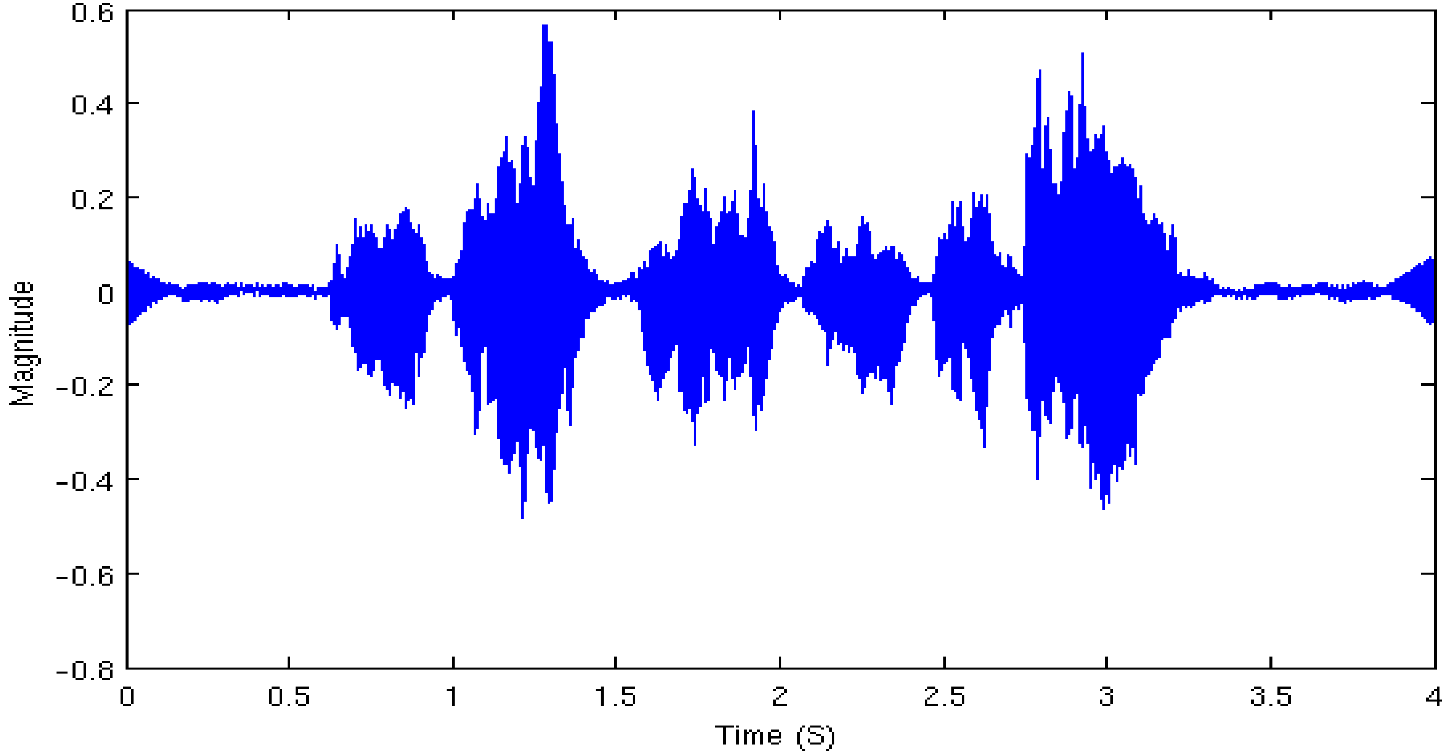
Pero, podemos hacer muchas cosas en el dominio del tiempo... es cómodo y bonito.

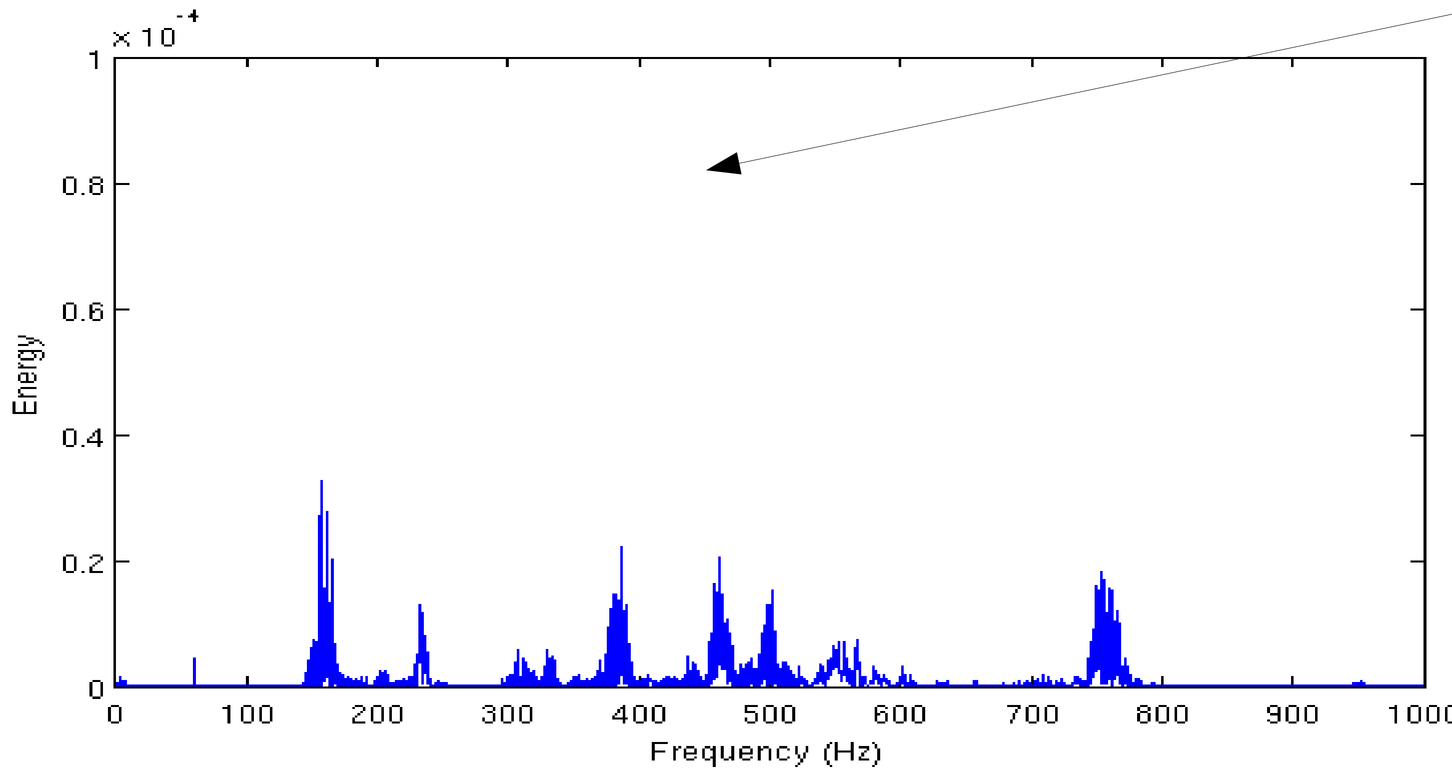
¿Para qué necesitamos irnos al dominio de la frecuencia?



???

Señal de Ruido





Señal de Ruido Removida

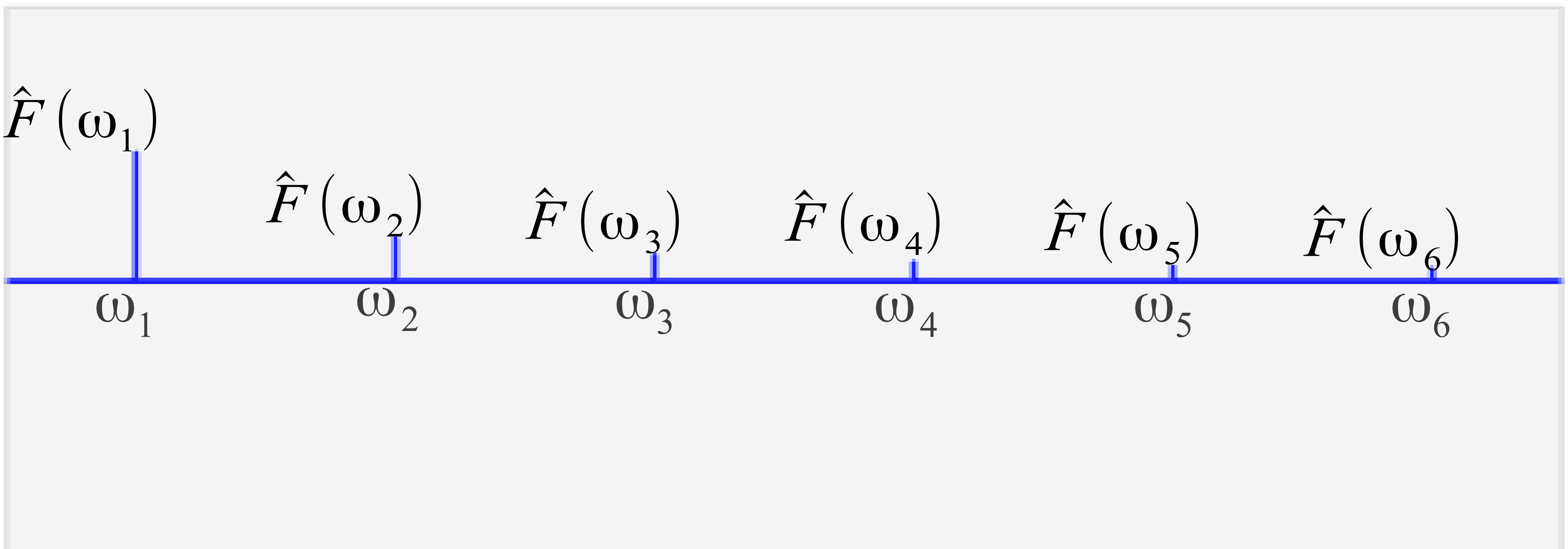
Por medio de hacer 0 a la magnitud de la señal a esa frecuencia.

Filtrado por frecuencia o *filtrado espectral*.

La señal en el dominio de la frecuencia es también conocido como su **espectro**.

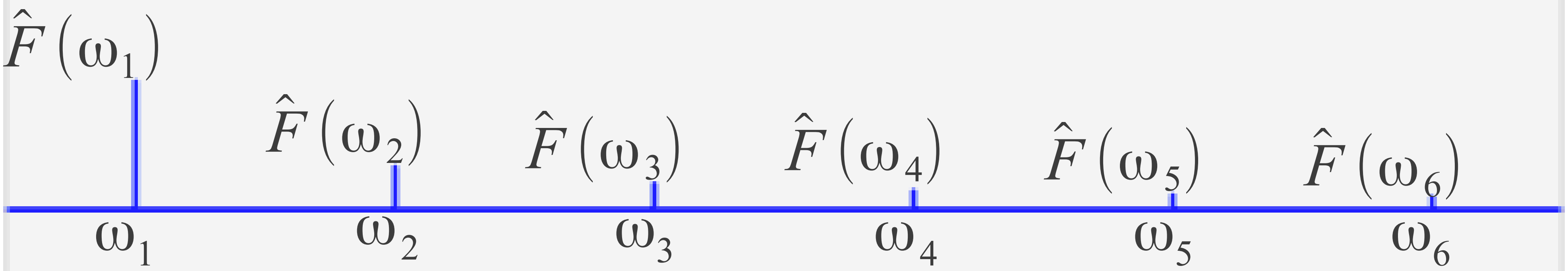
Representación de Ondas

- F es la señal f transformada al dominio de la frecuencia.
- ω_n son las frecuencias de las ondas que, al sumarse, representan a f.
- $F(\omega_n)$ es la magnitud de la onda que oscila con frecuencia ω_n.



$$\hat{f}$$

- F es la señal f transformada al dominio de la frecuencia.
- ω_n son las frecuencias de las ondas que, al sumarse, representan a f.
- $F(\omega_n)$ es la magnitud de la onda que oscila con frecuencia ω_n.

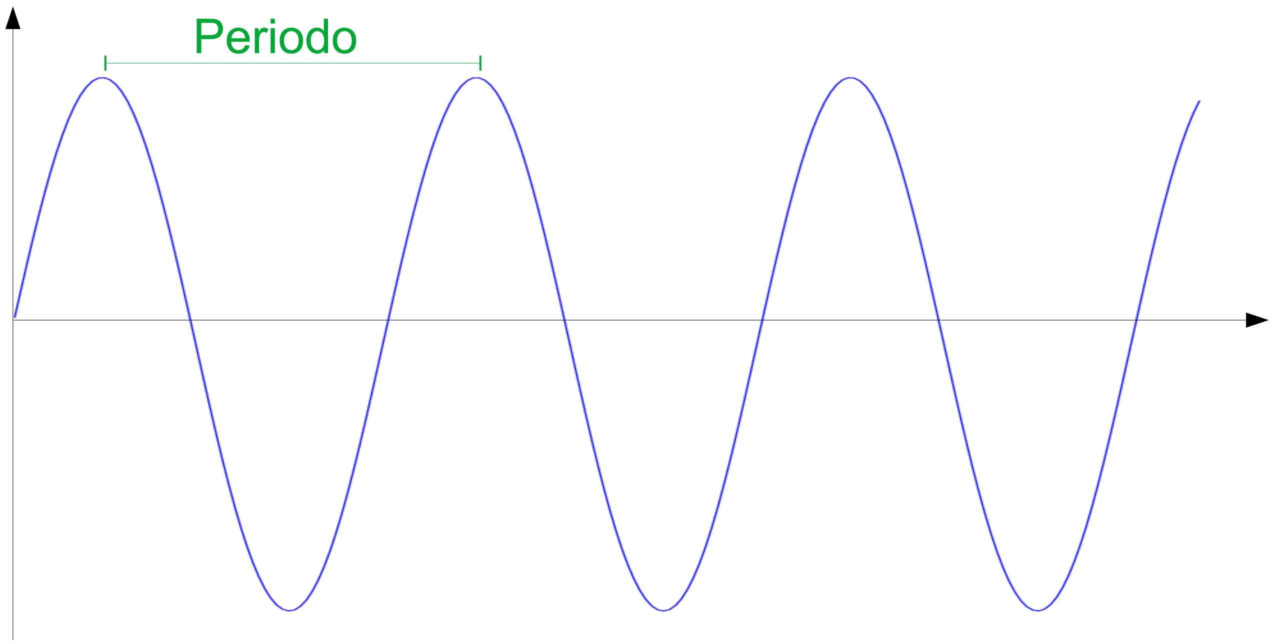


Cada una de estos valores
tiene que representar una onda
completamente.

$$\hat{f}$$

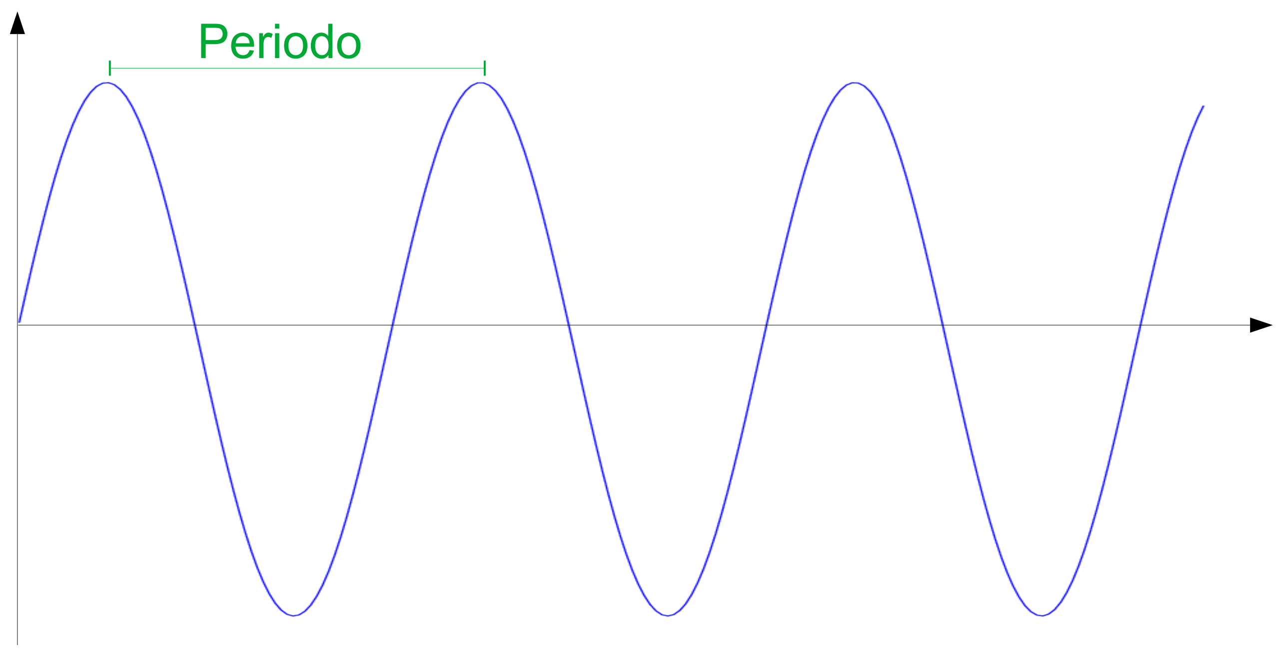
¿Qué es una onda?

- Es una señal periódica, que oscila a una frecuencia dada (lo cual depende de su longitud de onda, o periodo):



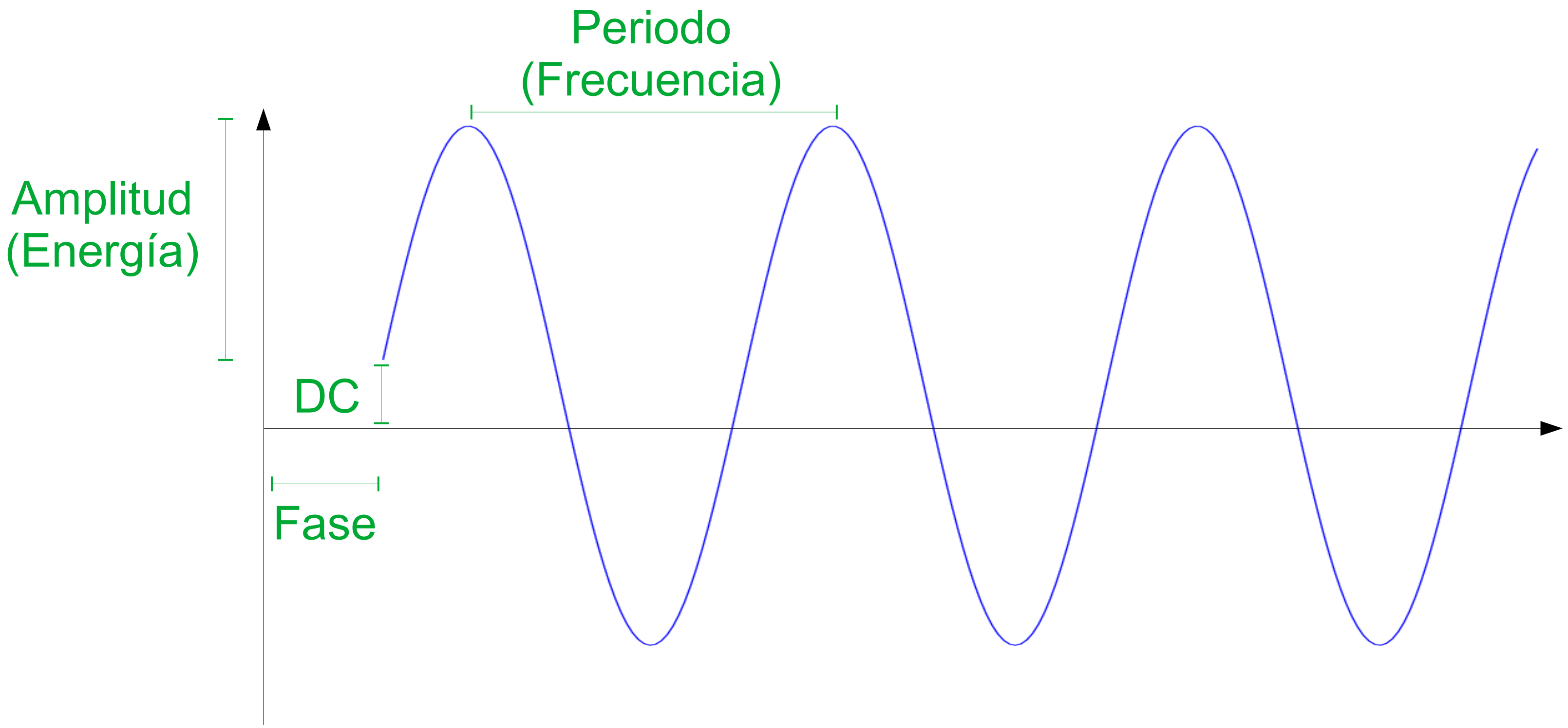
¿Cuáles son sus partes?

- Necesitamos poder definir una onda completamente. ¿Qué nos hace falta?



¿Cuáles son sus partes?

- Éstas son todas sus partes:



Representación de Ondas

- Una onda puede ser representada con un coseno, con un seno, o con un exponencial, ya que la fórmula de Euler indica que:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

- Donde **e** es el número Euler, que es la base del logaritmo natural, y se calcula con la siguiente serie:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{1*2*3} + \frac{1}{1*2*3*4} \cdots$$

- Se puede redondear a 2.71828.

Representación de Ondas

- Entonces, una onda **f** que:
  - Oscila a una frecuencia **ω**
  - Que tiene una amplitud **c**
  - Con un DC **d**
  - Y una fase **θ**
- Se puede representar así:

$$f(t) = c\,e^{i\omega t + \theta} + d$$

¿Una exponencial imaginaria?

- Hay varias razones:
  - A los(as) maestros(as) de señales y sistemas nos gusta torturar a estudiantes.
  - Como veremos después, representar una onda con exponenciales simplifica **enormemente** las ecuaciones de transformación.
  - Y, la exponencial puede representar *otras cosas*.

Exponencial Imaginaria: Tiempo

- Si la variable es tiempo, como habíamos dicho antes, la exponencial imaginaria representa una onda en el dominio del tiempo:

$$f(t) = c\,\mathrm{e}^{i\omega t+\theta} + d$$

Exponencial Imaginaria: Frecuencia

- Si la variable es frecuencia, la exponencial imaginaria actúa como un operador de desfase :

$$F(\omega)e^{i\omega t_0} \rightarrow f(t+t_0)$$

Donde F(ω) es f(t) en el dominio de la frecuencia.

Exponencial Imaginaria: Muestreo

- La parte real del operador de desfase es un coseno, el cual comienza en la parte más alta de la onda.
- Al extraer solo la parte real de la señal después de la operación, obtenemos el valor en t=0. Es decir, es una forma de muestreo:

$$F(\omega)e^{i\omega t_0} = \underbrace{F(\omega)\cos(\omega t_0)} + i\,F(\omega)\sin(\omega t_0)$$

Valor en t=0, después de haber desfasado t_0 segundos.
Esto equivale a: **$f(t_0)$**

¿Qué es ω?

- Es la “frecuencia angular”: radianes por segundo.
- Recordemos que el exponencial es realmente una sumatoria de un coseno y un seno que reciben como entrada un ángulo.

Relación entre ω y ζ

- La frecuencia en Hertz (ζ) representa periodos por segundo.
- Si cada periodo de una onda senoidal es 2π radianes, entonces:

$$\omega = 2\pi\zeta$$

Cálculo de la Transformada de Fourier

La Transformada es una Sumatoria

- Una señal discreta se puede considerar como un arreglo de muestras de energía.
- Por lo tanto, según Fourier, deberíamos de poder representar cualquier momento en el tiempo de una señal como *una sumatoria de las energías en ese momento de otras señales periódicas*.

Mapeo Formal
de Frecuencia a Tiempo

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \hat{F}(\omega_n) e^{i \omega_n t}$$

Donde:

- t es un momento en el tiempo en segundos
- $f(t)$ es la energía de la señal en el momento t
- N es el número de señales periódicas con las cuales queremos representar a $f(t)$
- ω_n es la frecuencia número n
- $F(\omega_n)$ es una onda con frecuencia ω_n

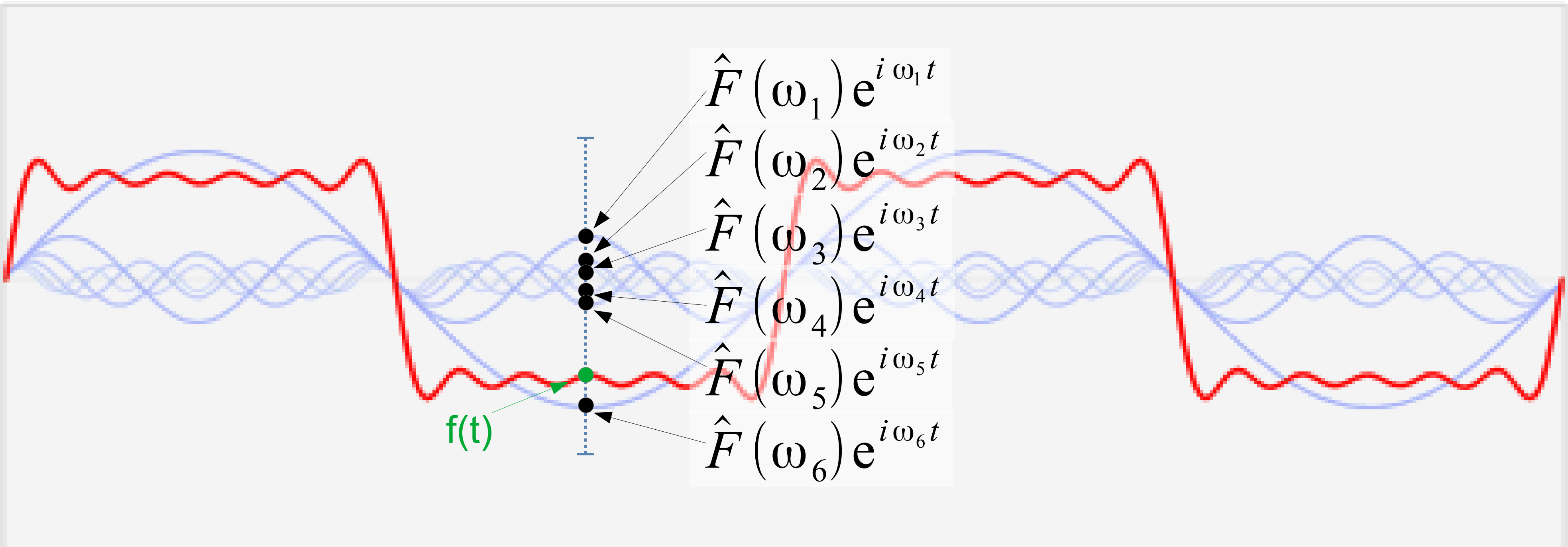
Mapeo Formal de Frecuencia a Tiempo

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\hat{F}(\omega_n) e^{i \omega_n t}}$$

La exponencial imaginaria está "muestreando" a la onda $F(\omega_n)$ en el tiempo t.

Donde:

- *t* es un momento en el tiempo en segundos
- *f(t)* es la energía de la señal en el momento *t*
- *N* es el número de señales periódicas con las cuales queremos representar a *f(t)*
- ω_n es la frecuencia número *n*.
- $F(\omega_n)$ es una onda con frecuencia ω_n.



$\hat{F}(\omega_1)e^{i\omega_1 t}$
$\hat{F}(\omega_2)e^{i\omega_2 t}$
$\hat{F}(\omega_3)e^{i\omega_3 t}$
$\hat{F}(\omega_4)e^{i\omega_4 t}$
$\hat{F}(\omega_5)e^{i\omega_5 t}$
$\hat{F}(\omega_6)e^{i\omega_6 t}$
f(t)

¿Mapeo?

- El valor *f(t)* es cálculado con todos los valores del dominio de la frecuencia $F(\omega_n)$. Esto significa dos cosas:
  - El tamaño de la señal en el dominio de la frecuencia **es la misma** que en el dominio del tiempo.
  - Y como todo mapeo, se puede hacer en dirección inversa: calculando un $F(\omega_n)$ con todos los valores del dominio del tiempo *f(t)*.

Mapeo Formal de Tiempo a Frecuencia

$$\hat{F}(\omega_n) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega_n t}$$

Donde:

- *t* es un momento en el tiempo en segundos
- *f(t)* es la energía de la señal en el momento t
- *T* es el tiempo final de *f(t)*
- ω_n es la frecuencia número *n*
- $F(\omega_n)$ es una onda con frecuencia ω_n

Mapeo Formal de Tiempo a Frecuencia

$$\hat{F}(\omega_n) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} f(t)\, e^{-i\omega_n t}$$

¿Qué significa esto?
¿Qué rol está jugando la exponencial imaginaria?

Donde:

- *t* es un momento en el tiempo en segundos
- *f(t)* es la energía de la señal en el momento t
- *T* es el tiempo final de *f(t)*
- ω_n es la frecuencia número *n*
- $F(\omega_n)$ es una onda con frecuencia ω_n

La variable es tiempo...

$$\hat{F}(\omega_n) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} \underbrace{f(t)\, e^{-i\omega_n t}}$$

La exponencial imaginaria está actuando como una onda oscilando a frecuencia ω_n.

El resultado es el **producto punto** entre:

- La señal a convertir, *f(t)*
- Una onda oscilando a frecuencia ω_n

Equivale a la contribución de la frecuencia ω_n en *f(t)*.

Resultado: un número complejo que representa a la onda oscilando a esa frecuencia **dentro de *f(t)***.

Otra forma de verlo...

- La Transformada de Fourier tiene muchas interpretaciones.
- Una que me ha gustado mucho la pueden ver en un video de YouTube del canal *3Blue1Brown*, titulado:
  - “But what is the Fourier Transform? A visual introduction.”
  - https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY
- Hay una copia del video en la página del curso.
  - Como forma de respaldo, por si el video es removido.

Pero lo más impresionante: todo esto con solo cambiar un signo

$$f(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \hat{F}(\omega_n) \mathrm{e}^{i \omega_n t}$$

$$\hat{F}(\omega_n) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} f(t) \mathrm{e}^{-i \omega_n t}$$

Versión Continua

- Lo que estamos viendo realmente es la Transformada *Discreta* de Fourier.
  - Ya que es la que nos es más relevante.
- Recordatorio: una sumatoria de los valores de un señal es equivalente a una integral (área bajo la curva).
- Por lo tanto, la versión Continua de esta transformada (la original) se puede obtener substituyendo las sumatorias por integrales.

Versión Continua

$$f(t)=\frac{1}{N}\int_{0}^{N}\hat{F}(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega$$

$$\hat{F}(\omega)=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}f(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt$$

Versión Continua (en Hertz)

$$f(t) = \int \hat{F}(\zeta)\, e^{i 2\pi \zeta t}\, d\zeta$$

$$\hat{F}(\zeta) = \int f(t)\, e^{-i 2\pi \zeta t}\, dt$$

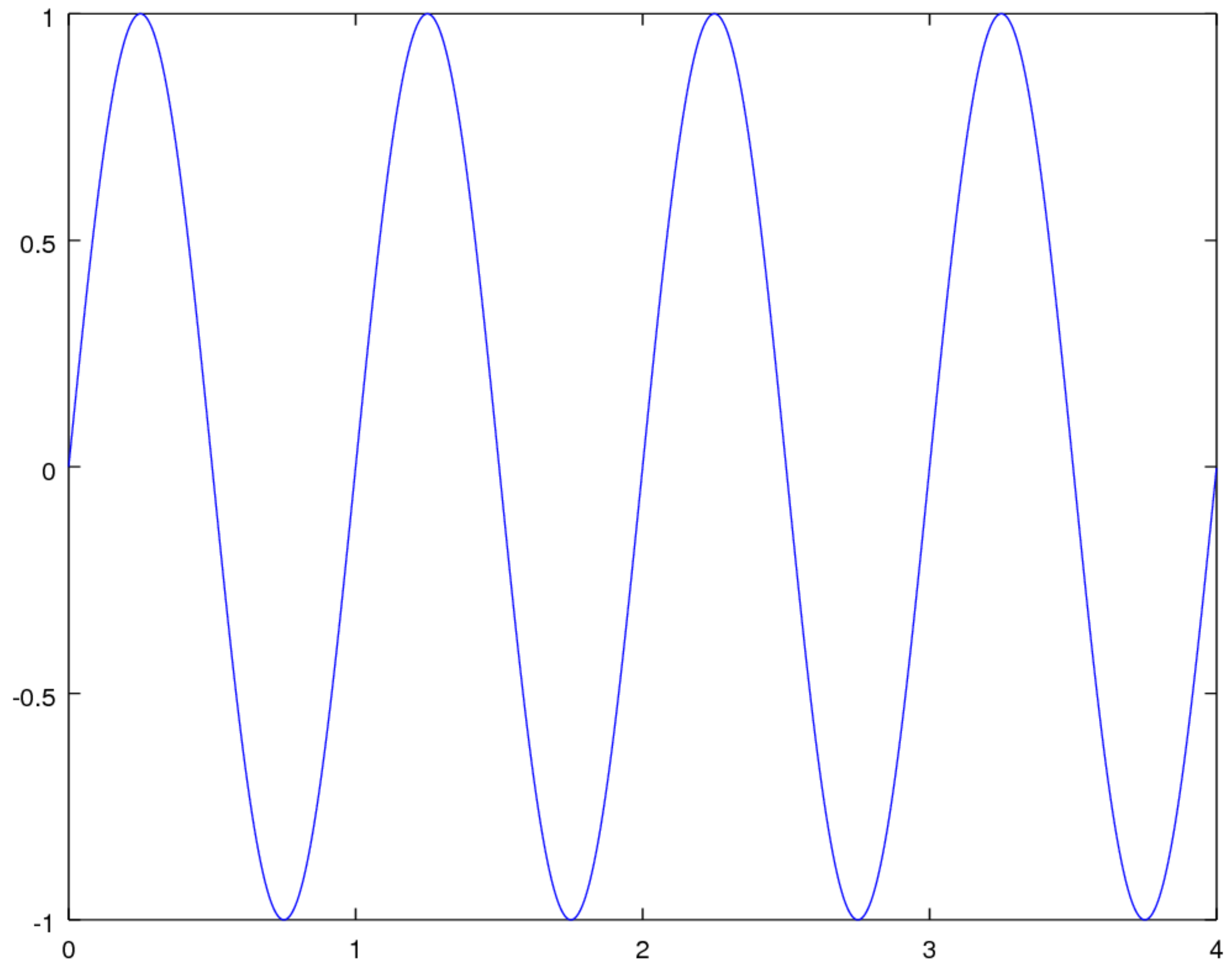
Componente DC

$$\hat{F}(0) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} f(t) \mathrm{e}^{-i0t}$$

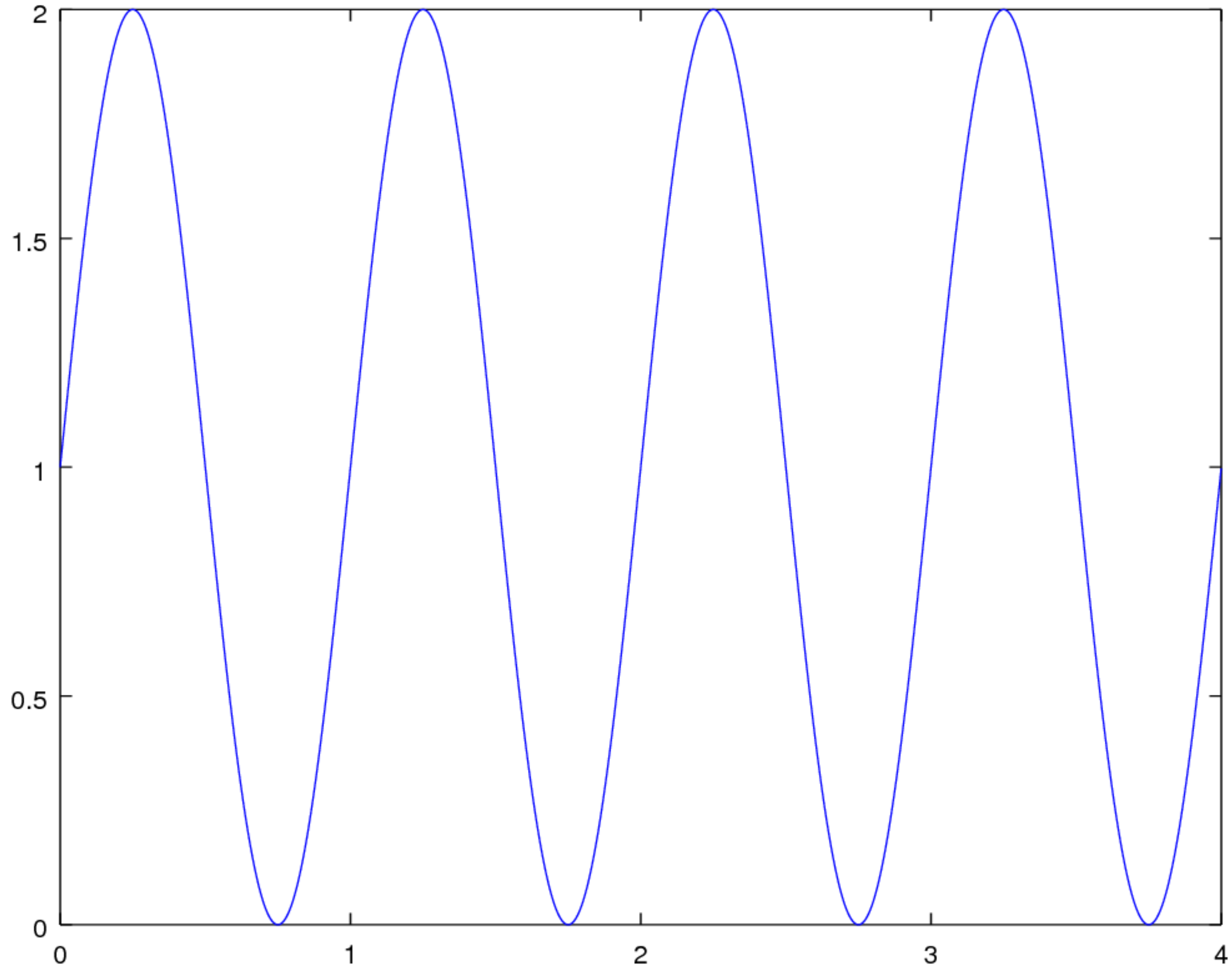
$$= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} f(t)$$

Es el promedio de la energía
de la señal en el periodo.

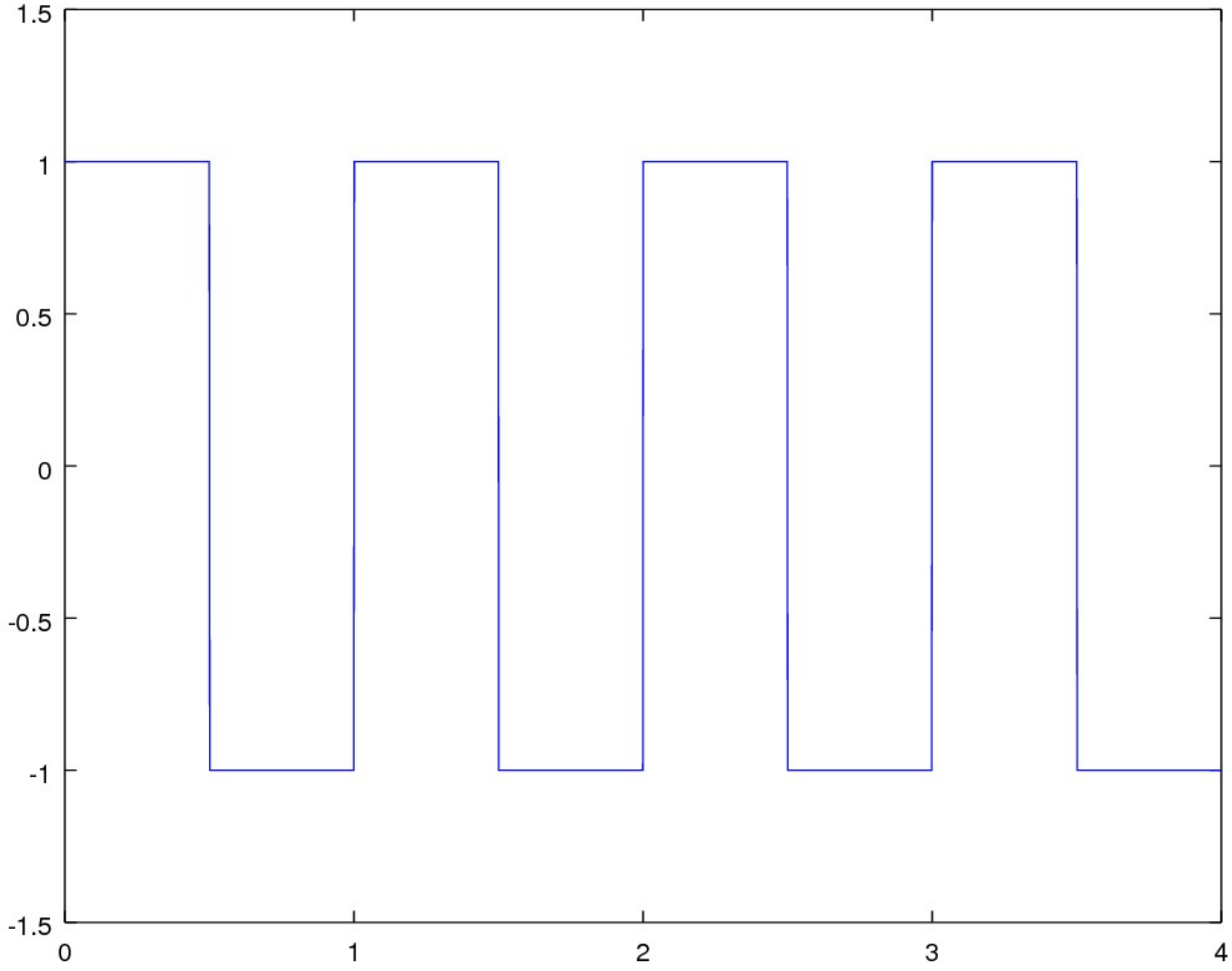
Componente DC



Componente DC

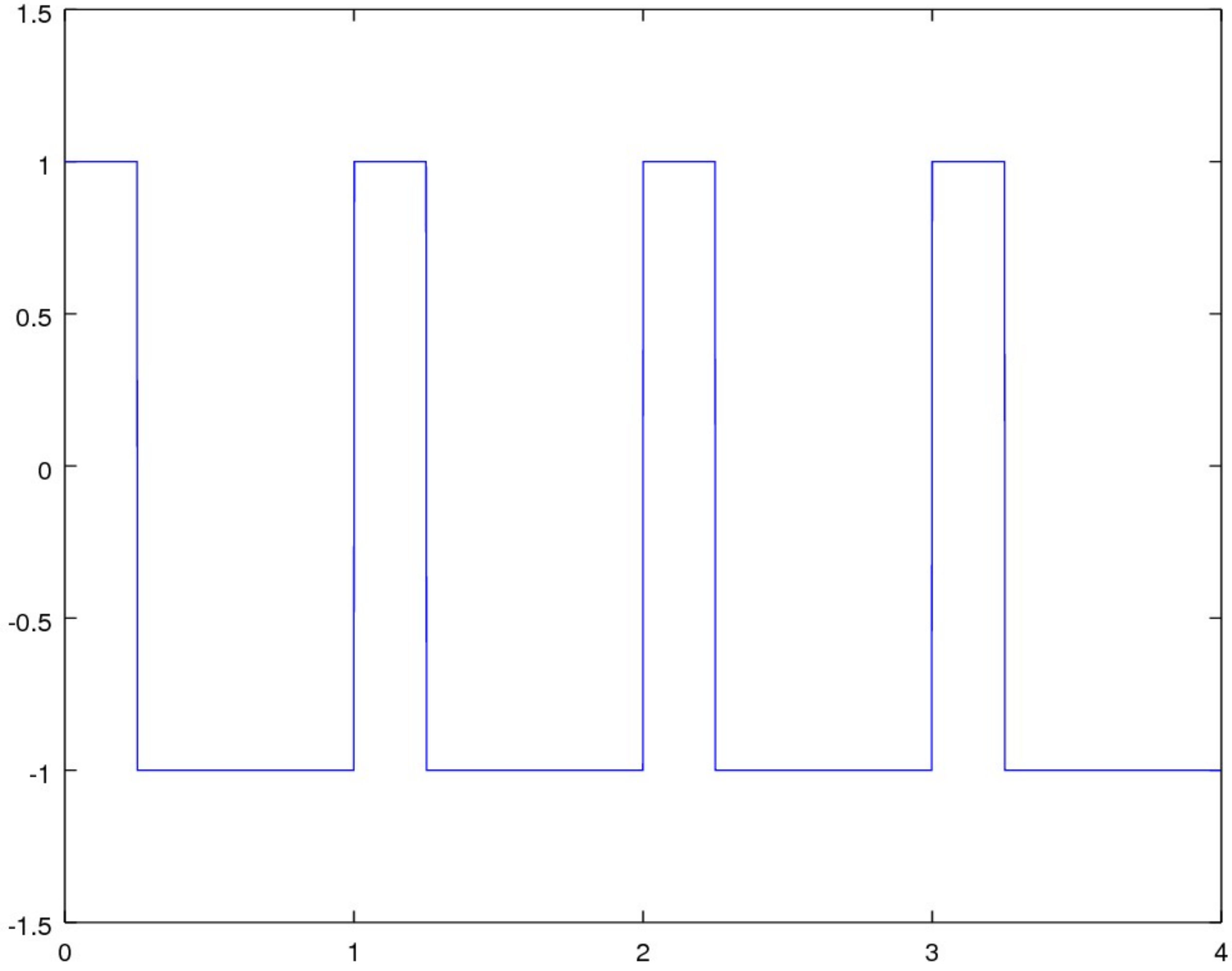


Componente DC



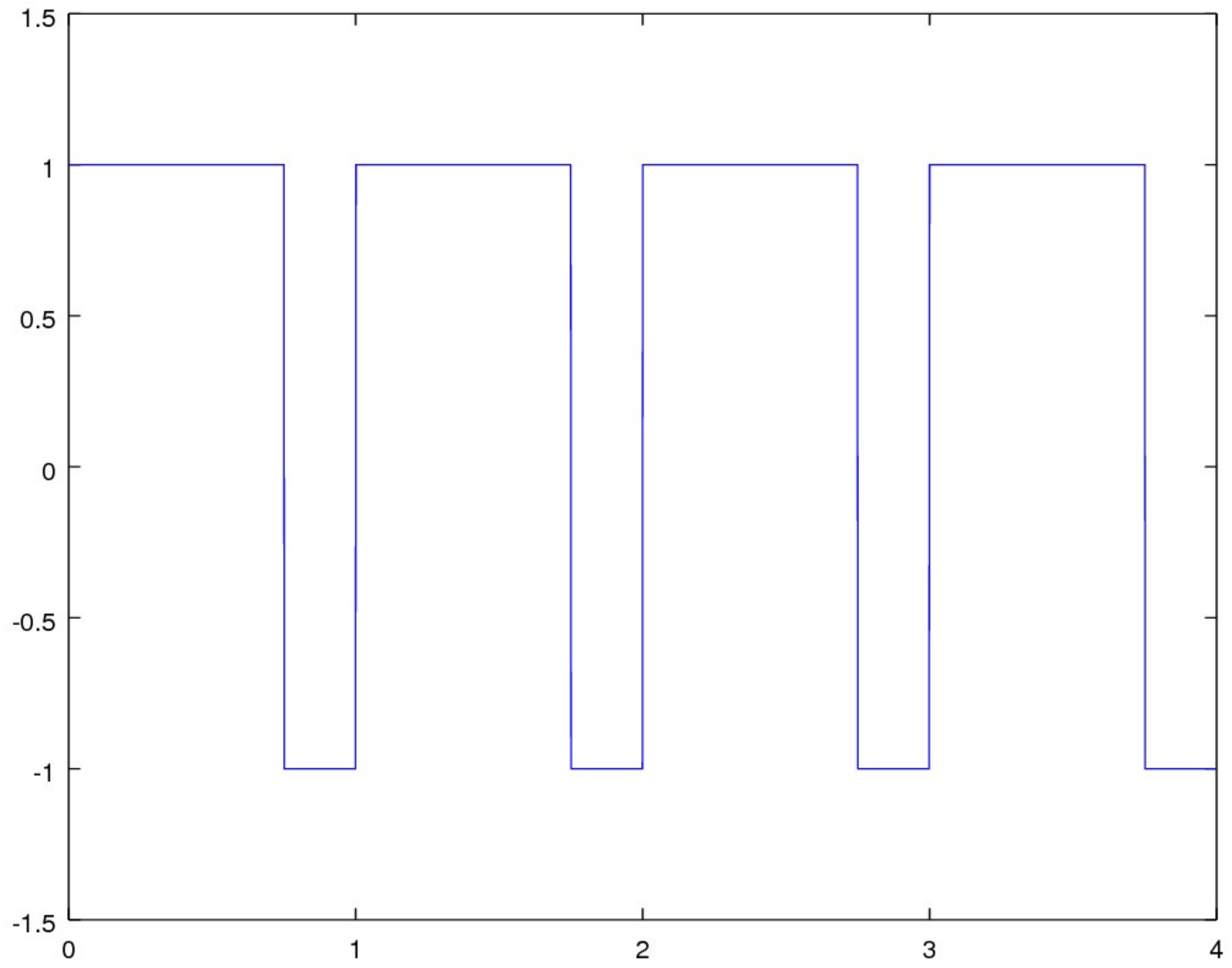
Ciclo de Trabajo: 50%

Componente DC



Ciclo de Trabajo: 25%

Componente DC



Ciclo de Trabajo: 75%

Propiedades de la Fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$\begin{aligned} e^{ix} + e^{-ix} &= \cos(x) + i\sin(x) + (\cos(-x) + i\sin(-x)) \\ &= \cos(x) + i\sin(x) + \cos(-x) + i\sin(-x) \\ &= \cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x) \\ &= 2\cos(x) \end{aligned}$$

$$\cos(x) = \Re(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

Propiedades de la Fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$\begin{aligned} e^{ix} - e^{-ix} &= \cos(x) + i\sin(x) - (\cos(-x) + i\sin(-x)) \\ &= \cos(x) + i\sin(x) - \cos(-x) - i\sin(-x) \\ &= \cos(x) + i\sin(x) - \cos(x) + i\sin(x) \\ &= i\,2\sin(x) \end{aligned}$$

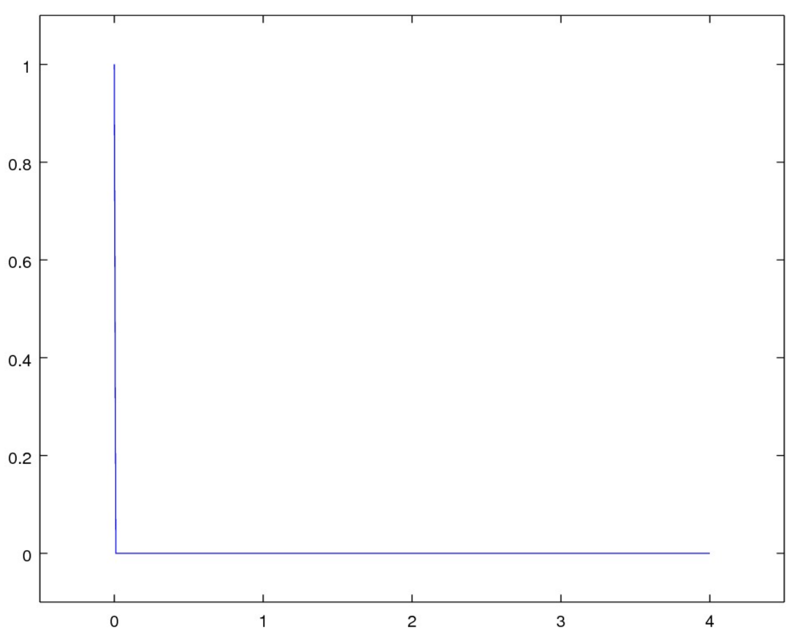
$$\sin(x) = \Im(e^{ix}) = \frac{1}{i\,2}(e^{ix} - e^{-ix})$$

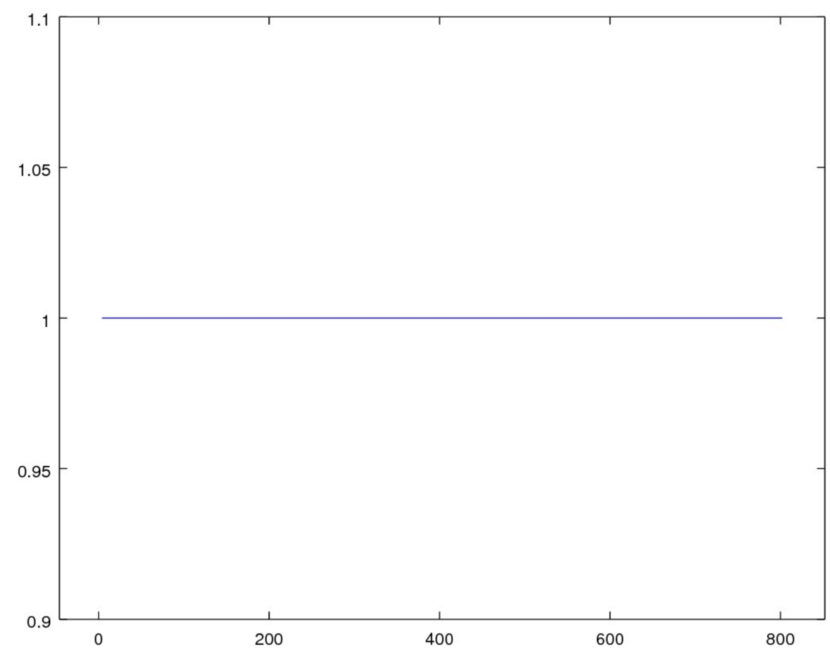
Propiedades de la Fórmula de Euler

$$
\begin{aligned}
\cos(x)\cdot\cos(y) &= \frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{iy}+e^{-iy}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{ix}e^{iy}+e^{ix}e^{-iy}+e^{-ix}e^{iy}+e^{-ix}e^{-iy}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)}+e^{i(x-y)}+e^{-i(x+y)}+e^{-i(x-y)}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}+e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)
\end{aligned}
$$

Propiedades de la Transformada de Fourier

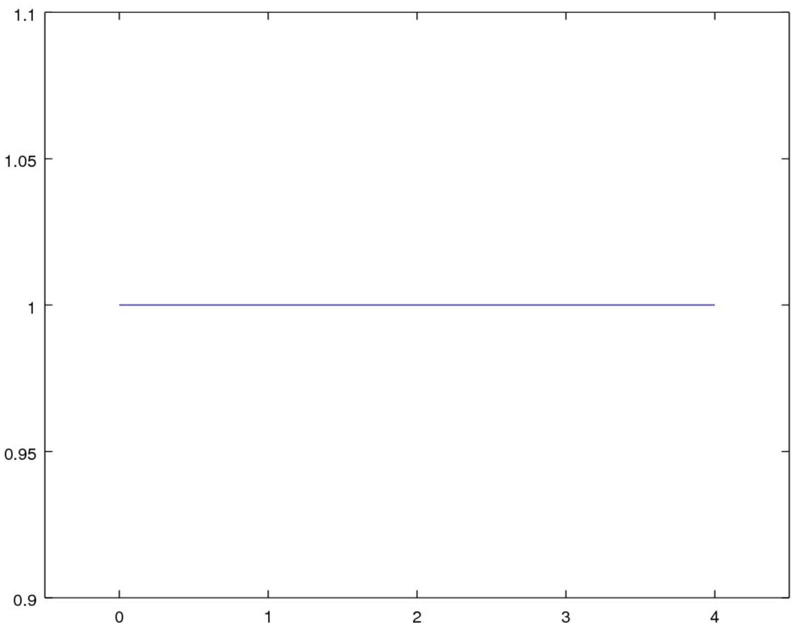
$$\delta(t) \quad \rightarrow F \rightarrow \quad 1$$

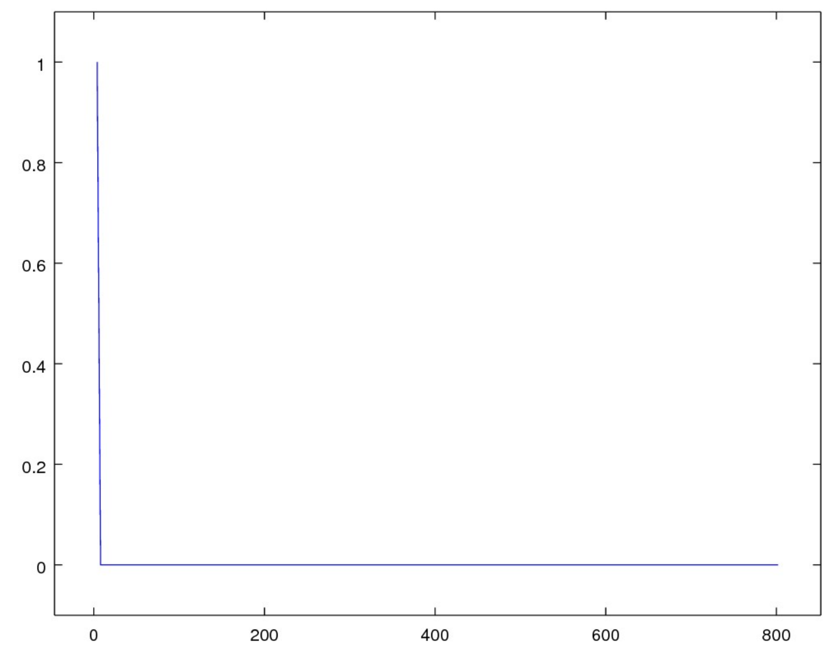




Propiedades de la Transformada de Fourier

$$1 \quad \rightarrow F \rightarrow \quad \delta(\zeta)$$



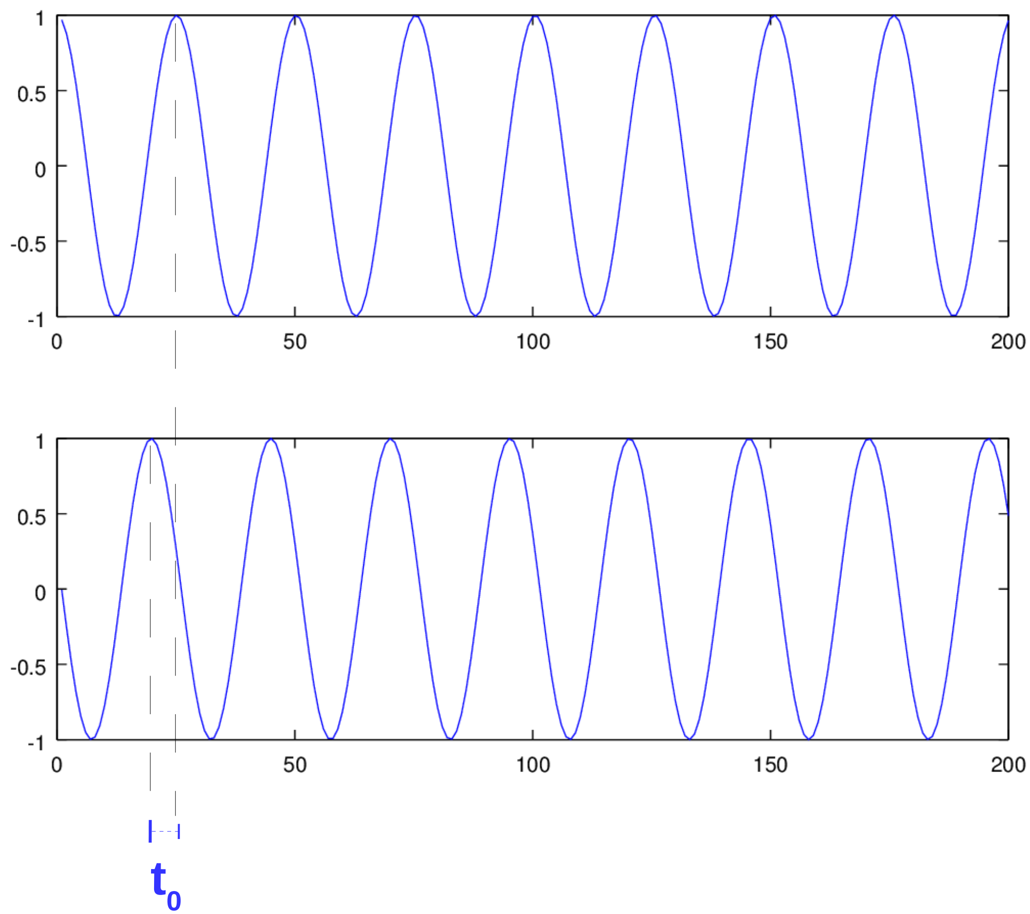


Propiedades de la Transformada de Fourier

$$x(t-t_0) \;\rightarrow F \rightarrow\; X(\zeta)\,e^{-i2\pi\zeta t_0}$$

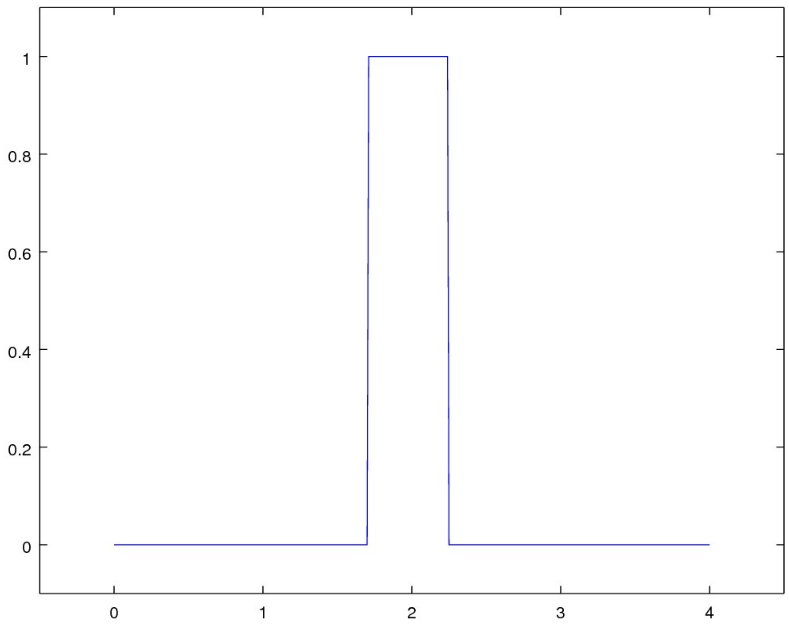
x(t)

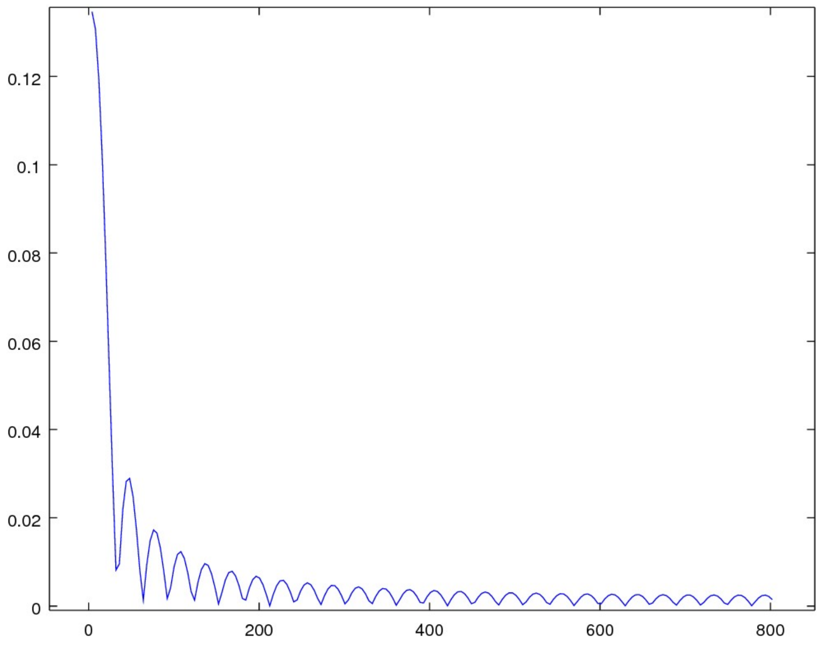
x(t-t_0)



Propiedades de la Transformada de Fourier

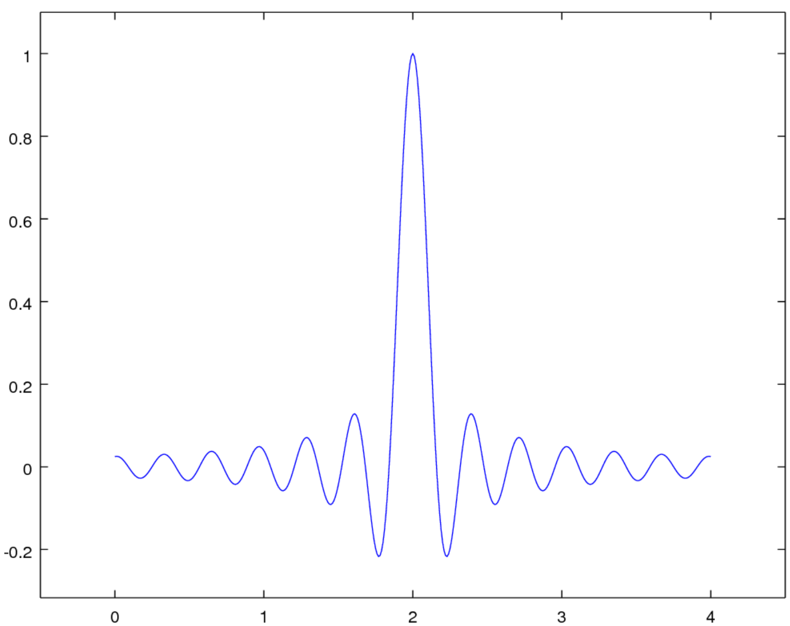
$$rec(t) \quad \rightarrow F \rightarrow \quad sinc(\zeta)$$

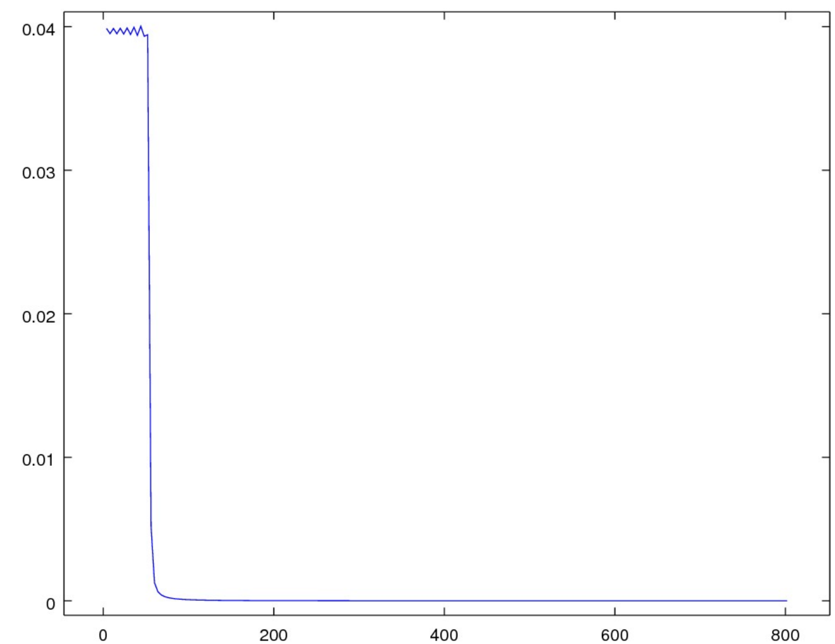




Propiedades de la Transformada de Fourier

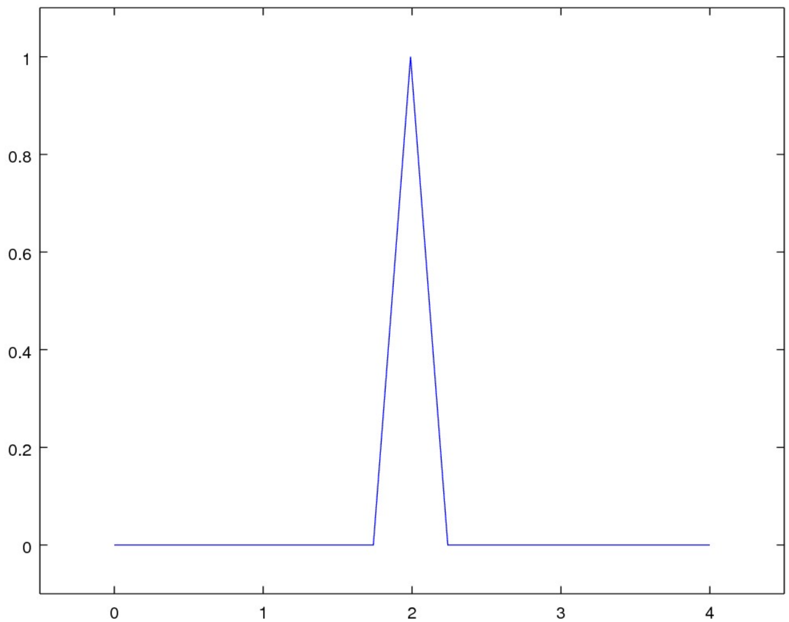
$$sinc(t) \quad \rightarrow F \rightarrow \quad rect(\zeta)$$

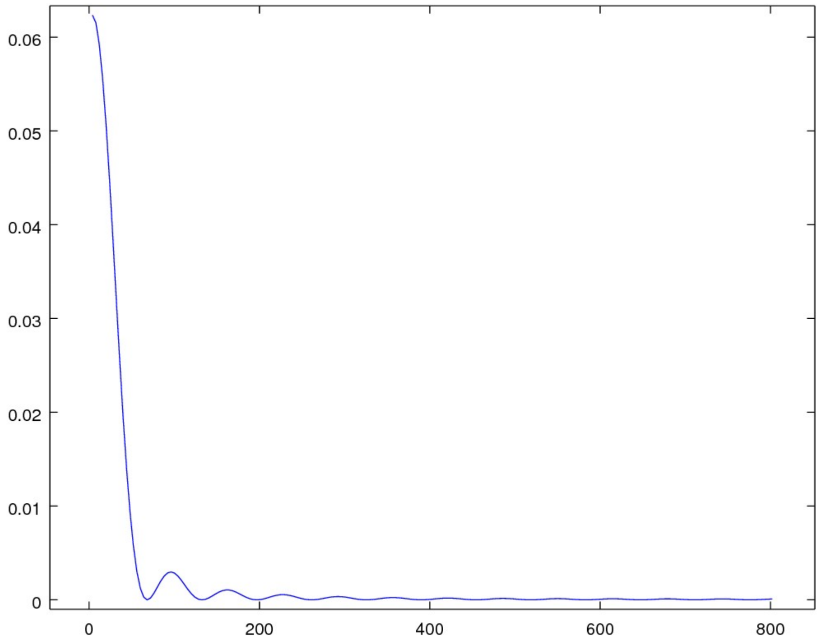




Propiedades de la Transformada de Fourier

$$tri(t) \rightarrow F \rightarrow sinc^2(\zeta)$$





Propiedades de la Transformada de Fourier

Guassiana $e^{-At^2} \rightarrow F \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-(\pi\zeta)^2/A}$

Convolución $x(t) * y(t) \rightarrow F \rightarrow X(\zeta)Y(\zeta)$

Correlación $Corr(x(t), y(t)) \rightarrow F \rightarrow X(\zeta)Y^H(\zeta)$

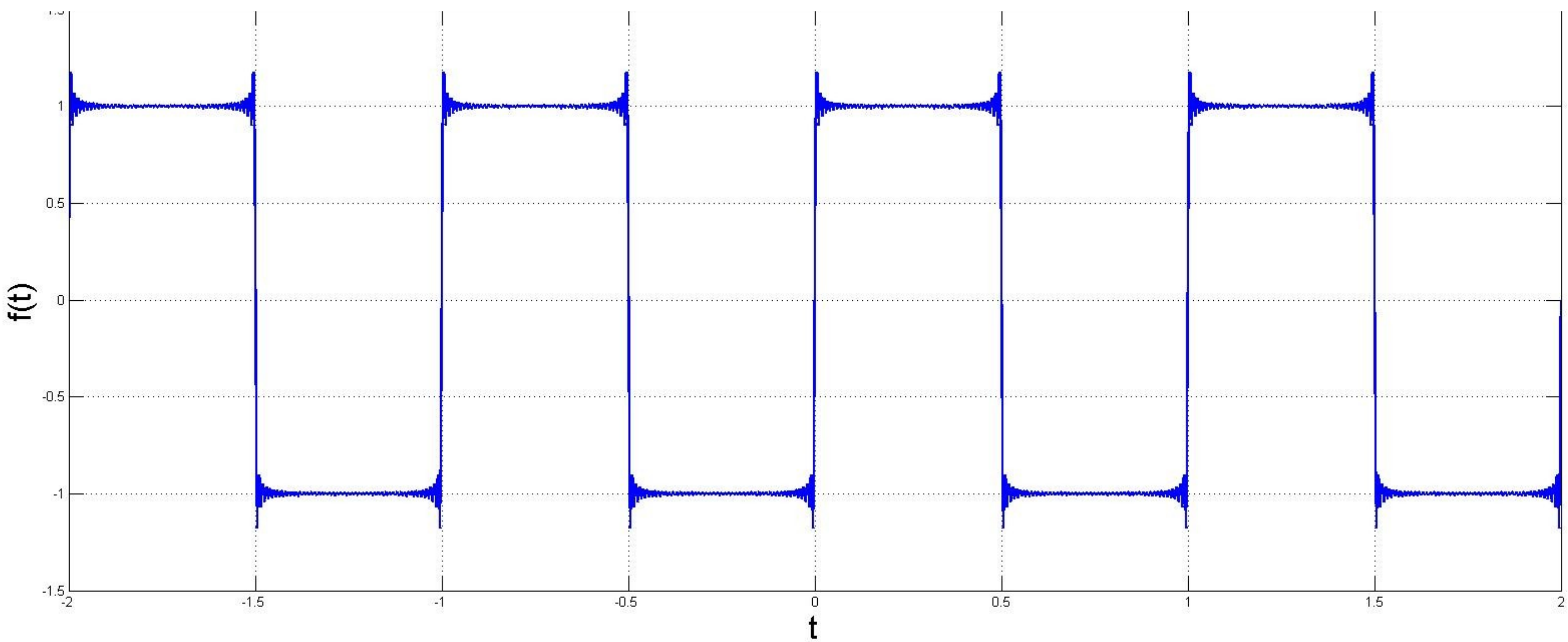
Escala de Tiempo $x(At) \rightarrow F \rightarrow \frac{1}{A} X(\zeta / A)$

Algunas Consideraciones

- Las *series* de Fourier pueden representar cualquier señal **periódica**.
- La *transformada* de Fourier asume que los datos de tiempo que se le entrega es realmente el **periodo** de una señal con longitud infinita, y es ésta la que se quiere transformar al dominio de la frecuencia.

Algunas Consideraciones

- La transformada de Fourier puede transformar señales discontinuas:
  - Aunque, esto resulta en aproximar la discontinuidad insertando componentes de alta frecuencia.



Algunas Consideraciones

- Sólo tiene una limitante del tipo de señal que puede transformar:
  - Que tenga **energía finita**.
  - Si fuera infinita, sería imposible calcular el componente DC.

Siguiente Tema:

Aspectos Prácticos de la Transformada de Fourier